现代数学译丛

单叶函数

www.duxiu.com



科学出版社

现代数学译丛

单叶函数

Ch. 泊茂仁克 著

杨维奇 译

科学出版社

1987

中国科学院数学研究所
藏 书
006849

内 容 简 介

本书是几何函数论方面的一本名著；介绍单位圆盘内单叶函数的理论，即单连通平面域的共形映照理论。第一部分讨论处理极值问题（例如比伯巴赫猜想）的各种方法；第二部分讨论单叶函数的边界性质。各章均附有习题。

本书可供大学数学专业高年级学生，研究生、教师和数学研究工作者参考。

Ch. Pommerenke
UNIVALENT FUNCTIONS
Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1975

现代数学译丛
单 叶 函 数
Ch. 泊茂仁克 著
杨维奇 译
责任编辑 吴永文 张鸿林
科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1987年2月第一版 开本：850×1168 1/32
1987年2月第一次印刷 印张：13 7/8
印数：0001—3,100 字数：356,000
统一书号：13031·3406
本社书号：4680·13—1
定价：3.60 元

中 译 本 序

我感到十分荣幸，杨维奇副教授把我的关于单叶函数的书译成中文在中国科学出版社出版。中译本改正了英文原版书中存在的一些错误。

撰写本书以来的十年中，尤其是今年，单叶函数理论有了许多新发展。

最重要的进展是比伯巴赫（Bieberbach）猜想已被 L. 狄布仁杰斯（de Branges）证明。基于娄威纳微分方程(6.1 节)，并应用阿施凯依和盖斯斐尔关于雅可比多项式的一个结果，狄布仁杰斯证明了米林猜想：若 $f\in S$ 且

$$\log\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}k(n-k+1)|c_k|^2\leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(n-k+1),\quad n=1,2,\cdots.$$

由列别杰夫-米林不等式(3.5 节)，从米林猜想即推出罗勃松猜想(1.3 节)；而比伯巴赫猜想则是罗勃松猜想的一个推论。这个证明出人意外的简单。

最近，小伯恩斯坦把关系式(5.1 节)

$$f(z)=O((1-|z|)^{-\alpha})\Rightarrow a_n=O(n^{\alpha-1})$$

中 α 的范围从 $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 2$ 扩充为 $\frac{1}{2}-\eta<\alpha\leqslant 2$，其中 $\eta>\frac{1}{320}$。这也是一个相当惊人的结果。

关于单叶函数边界性质的理论已引起人们浓厚的兴趣，并已

有了很大发展. 例如,若 f 把 D 共形映照成 G, 那么 $f'(z)$ 的性质同 ∂G 的光滑性之间有着紧密的联系. 这方面的新进展都同重要的函数类 BMO 有关.

如果说由于新近的研究成果而使得本书的部分内容显得过时了,那是应当庆幸的;因为它标志着单叶函数与共形映照是一个极其活跃的研究领域. 我期望在世界的东方和西方,南方和北方,出现更加振奋人心的新成果.

Ch. 泊茂仁克

一九八四年九月于柏林

序　　言

扩充复平面内每个单连通区域可以共形映照到一个标准区域，如单位圆盘．本书阐述单位圆盘内的单叶函数(即内射亚纯函数)的理论(若更方便时也讨论单位圆外部的单叶函数)．

第一部分论述在研究极值问题(如比伯巴赫猜想)中产生的各种方法．我们所论及的方法相当齐全，只是略去了对称化方法(参看 Hayman 第四章或 Jenkins 第八章)和对系数体的精密研究(见 Schaeffer and Spencer)． 关于单叶函数的大量的研究成果，我们当然只能论证其中的一部分．而关于多连通区域和多叶函数的理论，本书没有涉及．关于二次微分的一章系由諾尔德·珍生撰写，其中有珍肯斯一般系数定理的证明．

本书第二部分论述单叶函数的边界性质．在材料的选取上作者的倾向性十分明显，全部论述系建立在正规函数理论的基础之上．我们几乎没有提及诸如调和测度和极值长度这样一些重要题目，因为有关这些问题已有十分出色的著作，如 Nevanlinna, Jenkins 和 Ahlfors《共形不变量》．对拟共形映照本书只作概略的研究．

本书是根据方法而不是根据结果来编排所述内容的，第一部分尤其是这样．因此有时我们用几种不同的方法证明同一结果．

本书各章之间除个别结果外彼此独立． 但第一章则不然，全书各章都要用到它的结果；此外我们也广泛地引用格隆斯基不等式和戈鲁辛不等式(第三章、第四章及 5.3 节、9.4 节、11.2 节)．作为阅读本书的必备知识，阿尔福斯的得到公认的教科书在大多数场合下是足够的．

我们常用作者的名字，有时还加上页数来指明所引用的书，例如：(Ahlfors 131 页)系指他的书《复分析》；而以作者名字及发表年分来表示某篇论文，若引用作者同一年发表的好几篇论文，则

添加字母以区别，例如：（Ahlfors 1963）系指他的关于拟共形反射的论文。我们的参考文献并不倾向于搞得十分精确；比如就某个结果提到好几位作者时，常常意味着先提及的论文所包含的结果具有较弱的形式。引用同一节内某式时用其编号表示，仅在提到不同章节中某式时才添上节的号码。

关于单叶函数理论还有几种各有所侧重的论述，例如Gattegno and Ostrowski 1949a, b 及 Hayman 1965；也可参看珍当斯的书和戈鲁辛(英文新版)的书。裴尔那迪编制了一个相当完全的文献目录(见 Bernardi 1966)。

在此谨向许多我曾有机会同他们讨论过单叶函数的数学家致谢，特别要感谢 D. 阿哈罗诺夫(1971)，J. 贝克尔，K. 宾莫尔，J. 克鲁涅，W. 海曼，J. 呼梅尔 (1972a) 和 G. 珍生。衷心感谢 J. 贝克尔、D. 布拉纳恩和 B. 伊克，他们阅读了手稿并提出了许多改进意见。感谢宣哲尔夫人为我打字，T. 菲利茨替我校对，L. 泊茨仁克夫人给本书绘图。本书是在柏林工业大学与伦敦皇家学院的支持下写成的。

一九七三年十一月于柏林

目　　录

第一章　一些基本结果…… 1
1.1　单叶函数…… 1
1.2　经典的偏差定理…… 10
1.3　比伯巴赫猜想…… 17
1.4　单叶函数序列…… 21
1.5　附录：若当曲线定理…… 25
第二章　某些特殊类…… 30
2.1　从属关系与正实部函数…… 30
2.2　星形函数与凸函数…… 38
2.3　近于凸函数…… 47
第三章　格隆斯基不等式…… 53
3.1　格隆斯基不等式…… 53
3.2　戈鲁辛不等式…… 62
3.3　一些精确的系数估计…… 67
3.4　泛系数：费茨盖拉德不等式…… 72
3.5　泛系数：米林方法…… 78
3.6　附录：复矩阵…… 90
第四章　格隆斯基不等式的推广…… 94
4.1　不相交单叶函数…… 94
4.2　有界函数与比伯巴赫-艾伦伯格函数…… 101
4.3　格拉贝定-谢菲尔不等式…… 107
4.4　格拉贝定-谢菲尔不等式的应用…… 123
第五章　增长问题…… 132
5.1　对积分的估计…… 132
5.2　系数的增长…… 138

5.3 增长的分布 …… 147
5.4 缺项级数 …… 158
第六章 单叶函数与微分方程 …… 167
6.1 娄威纳微分方程 …… 167
6.2 应用于估计问题 …… 176
6.3 应用于单叶性判别 …… 184
6.4 二阶线性微分方程 …… 190
第七章 极值问题与变分 …… 194
7.1 极值问题与极端点 …… 194
7.2 变分 …… 197
7.3 谢菲尔微分方程 …… 204
7.4 其他单叶函数类 …… 213
第八章 二次微分 …… 223
8.1 引言 …… 223
8.2 二次微分的基本性质 …… 226
8.3 轨线的整体结构 …… 234
8.4 容许集与容许函数 …… 244
8.5 面积偏差的估计 …… 251
8.6 一般系数定理 …… 260
8.7 对于极值问题的应用 …… 268
第九章 边界性质 …… 278
9.1 正规函数 …… 278
9.2 素端与极限 …… 288
9.3 局部连通性与若当曲线 …… 296
9.4 拟共形曲线 …… 304
第十章 导数的边界性质 …… 314
10.1 光滑边界曲线 …… 314
10.2 角微商 …… 322
10.3 长度的偏差 …… 332
10.4 线性测度与单叶函数 …… 340

10.5　普莱斯奈尔定理与角微商 …………………………… 345
第十一章　容量……………………………………………… 352
11.1　容量的性质 …………………………………………… 352
11.2　边界性质与容量 ……………………………………… 365
参考文献……………………………………………………… 378
符号表………………………………………………………… 397
名词索引……………………………………………………… 399

第一章　一些基本结果

这一章旨在叙述单叶函数的一些经典结果，这些结果是以后一系列更深刻的结果的背景．因此，本章的材料将为全书所需，其中绝大部分内容大概已为读者所熟知．对于尚未解决[1]的比伯巴赫（Bieberbach）猜想问题的研究进展情况，我们也将作一概述．

1.1　单叶函数

1. 设H是扩充复平面 $\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 内一区域．我们把在H内亚纯并且内射(即一一对应)的函数称为在H内**单叶**．

与通常的单叶性定义不同，我们的单叶性定义中已包含了函数亚纯的假设．因此，函数$f(z)$在H内单叶当且仅当 $f(z)$ 在H内除去至多一个极点之外解析，并且

$$f(z_1)\neq f(z_2)\quad (z_1,\ z_2\in H,\ z_1\neq z_2).$$

在H内单叶的函数必在H的每一子域内单叶．

最简单的单叶函数是**麦比乌斯**（Moebius）**变换**

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad (a,b,c,d\in\mathbf{C},\ ad-bc\neq 0).$$

现列举单叶函数的一些性质．

设 $f(z)$ 在H内单叶，则

(a) 若g在G内单叶，且 $f(H)=\{f(z):z\in H\}\subset G$，则复合函数 $g(f(z))$ 在H内单叶．特别，$1/f(z)$ 单叶当且仅当 $f(z)$ 单叶．

(b) 一解析函数在一点某邻域中内射当且仅当其导函数在该点不为零（Ahlfors 131 页)．因此，对 $z\in H$ 有 $f'(z)\neq 0$．其

1) 比伯巴赫猜想已由 Louis deBranges 证实(见中译本序)，文中指的是撰写本书时的情况．以下均如此，不再一一说明．——译者注

逆不真．例如，函数 $\exp(2\pi z)$ 的导数不等于零，但在 $|z|<1$ 内非单叶。

若 $f(z)$ 在点 z_0 有一极点，则 $1/f(z)$ 在 z_0 的邻近解析单叶，从而在 z_0 有非零导数．这指出 z_0 必是 $f(z)$ 的单极点．

(c) 函数 $f(z)$ 把 $H\subset\hat{\mathbf{C}}$ 一一映照为 $f(H)\subset\hat{\mathbf{C}}$，并且在球面度量下连续．因反函数亦亚纯，故 f 是 H 到 $f(H)$ 的一个同胚．因而所有在拓扑映照下不变的性质，如连通性，在单叶映照下仍然保持．经常要用到如下拓扑性质：若序列 (z_k)，$z_k\in H$，收敛于 ∂H(即在 H 内无极限点)，则其像点序列 $(f(z_k))$ 必收敛于 $\partial f(H)$ (Ahlfors 225 页)．

(d) 若曲线 $C:z(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，是 H 内一条光滑若当 (Jordan) 弧 ($z'(t)$ 连续且不为零称为光滑)，则像曲线 $f(C)$：$f(z(t))$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，是 $f(H)$ 内的光滑若当弧．$f(C)$ 在点 $f(z_0)(z_0=z(t_0))$ 的切线与正实轴的交角为 $\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0)$，若 $z_0=\infty$ 或 $f(z_0)=\infty$，结论要作一些容易想到的改变．由此可知，过点 z_0 的两曲线的交角同像曲线在 $f(z_0)$ 的交角相同．因此，单叶映照是**共形**同胚．

(e) 设 $A\subset\mathbf{C}$ 是 H 的紧子集，它不含 f 可能有的极点．则其像集的(欧氏)面积

$$\operatorname{area} f(A)=\iint_A |f'(z)|^2 d\Omega,$$

$d\Omega$ 表示面积元素．这是一个勒贝格 (Lebesgue) 积分．若 A 为若当可测，上述结果仍成立，而积分则成为黎曼积分．

2. 往后我们将只限于考虑单连通区域 (Ahlfors 139 页)．用记号

$$D=\{z\in\mathbf{C}:|z|<1\},\quad \Delta=\{z\in\hat{\mathbf{C}}:|z|>1\}$$

分别表示单位圆盘和单位圆周的外部．单位圆周 $\{|z|=1\}$ 用 ∂D 或 $\partial\Delta$ 表示，∂ 是表示边界的符号．

单叶函数全部理论的出发点是如下这个令人惊异的，且对高维情形没有明显类似结论的重要定理：

黎曼（Riemann）映照定理 设 $G \subsetneqq \mathbf{C}$ 是单连通区域，$w_0 \in G$，$0 \leqslant \alpha < 2\pi$. 则存在唯一的单叶函数 $f(z)$ 把 D 映为 G，且满足 $f(0) = w_0$，$\arg f'(0) = \alpha$.

定理的证明可在许多教科书中找到（如 Ahlfors 222 页）。黎曼映照定理表明，作为几何对象的单连通区域与作为分析对象的经适当标准化的单叶函数之间存在一一对应．需要强调的是，在定理中不能同时规定 $|f'(0)|$ 取指定的值．

现给出定理唯一性部分的一个典型应用：设 $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$（$a_1$ 为实数）在 D 内单叶，$f(D)$ 关于实轴 $\mathbf{R}$ 对称．考虑

$$\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} = a_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \cdots.$$

因 $\bar{f}(D) = f(D)$ 我们断定 $\bar{f}(z) \equiv f(z)$，从而系数 a_n 皆为实数。

反射原理（Ahlfros 227 页）表明，若区域 G 以一条解析若当曲线为其边界，则映照函数在 $\overline{D}$ 解析．第九章将详细研究函数的边界性质．

以 S 表示由在单位圆盘内解析单叶的函数

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1)$$

组成的类．这些函数已作了标准化：$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$．黎曼映照定理中的函数不必属于 S，但可表为

$$w_0 + r_0 e^{i\alpha} f(z), \ f \in S,$$

其中 $r_0 = r_0(G, w_0)$ 由 G 和 w_0 所唯一确定，称为区域 G 关于点 w_0 的"内映照半径"．

施行这种标准化是为了消去不必要的参数，使结论的陈述简化．并且如此作成的空间 S 是紧的，而由所有 D 内解析单叶函数作成的空间则不然．

例 1.1 考虑寇勃（Koebe）函数

$$f_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad (|z| < 1).$$

它可以表为

$$f_0(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right].$$

因 $(1+z)/(1-z)$ 把 D 单叶映照为半平面 $\{\mathrm{Re}\,w>0\}$ 而知寇勒函数属于 S，并且 $f_0(D)$ 是沿半直线 $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ 切开的平面。将会看到，在许多问题上寇勒函数都是 S 中的"最大"函数。函数

$$e^{-i\theta}f_0(e^{i\theta}z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{i(n-1)\theta}z^n$$

也属于 S，称为寇勒函数的旋转。

常常需要考虑单连通区域 $G\subset\hat{\mathbf{C}}$，$\infty\in G$，但除去 $G=\hat{\mathbf{C}}\setminus\{a\}$ 的情形。这时 $E=\hat{\mathbf{C}}\setminus G$ 是一个连续统，即包含不止一点的连通紧集。映照 $w^*=\dfrac{1}{w-c}$ $(c\in E)$ 把 G 变成 $G^*\subsetneq\mathbf{C}$，故可应用黎曼映照定理。取 $\Delta=\{|z|>1\}$ 为标准区域以代替 $D=\{|z|<1\}$，让 ∞ 点保持固定，即知存在唯一的如下形式的函数

(1) $\quad g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\ (|z|>1),\ b>0$

把 Δ 单叶映照为 G。

用 Σ 表示由 Δ 内单叶函数

(2) $\quad g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\ (|z|<1)$

组成的类；亦即对函数(1)作了标准化 $b=1$。用

$$E=E(g)=\mathbf{C}\setminus g(\Delta)$$

表示像域的余集。

若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 属于 S，则函数

$$g(z)=\frac{1}{f(z^{-1})}=\frac{z}{1+a_2z^{-1}+\cdots}$$
$$=z-a_2+\cdots(|z|>1)$$

属于 Σ，且因 S 类中函数无极点，故 $g(z)\neq 0$。反之，若 $g\in\Sigma$，$c\in E(g)$，则函数

$$f(z)=\frac{1}{g(z^{-1})-c}=\frac{z}{1+(b_0-c)z+\cdots}$$
$$=z+(c-b_0)z^2+\cdots(|z|>1)$$
属于 S. 必须在余集中选取 c，否则 $f(z)$ 将有极点. 我们看到，类 Σ 比类 S 稍微要广泛些，因为对于 $f\in S$，值 ∞ 总是不取的，而对于 $g\in\Sigma$ 却没有什么值不取的假设.

$g\in\Sigma$ 的展开式(2)中的系数 b_0 称为 $E(g)$ 的共形中心. 因

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(re^{i\theta})d\theta\quad(r>1),$$

容易推出

(3) $$b_0\in E(g)\text{ 的凸包.}$$

对函数(2)作进一步的标准化 $b_0=0$ 常常是方便的，对于那些在像平面平移下不变的问题尤其如此. 以 Σ_0 表示形如

$$g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots(|z|>1)$$

的单叶函数组成的类. 应当指出，对于此类函数推不出当 $z\in\Delta$，$g(z)\neq 0$ 的结论(对照下面的例 1.3).

3. 分段光滑的闭曲线 C 关于点 $w\notin C$ 的环绕次数（或指示数）定义为

(4) $$\chi(C,w)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{\omega-w}\,d\omega.$$

在 $\mathbb{C}\backslash C$ 的每个分集内，环绕次数是常数，并且在无界分集内等于零（Ahlfors 116 页). 由此出发，在 1.5 节我们将给出若当曲线定理的一个证明.

现在我们来导出两个单叶性准则. 第一个的更一般形式将在 9.3 节推论 9.5 中给出.

引理 1.1 设 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 内解析在 ∂D 上内射. 则 $f(z)$ 在 D 内单叶，且把 D 映照成(闭)若当曲线 $J=f(\partial D)$ 的内区域.

证 若 $w\notin J$，则由辐角原理（Ahlfors 151 页）$f(z)-w$ 的零点个数为 $\chi(J,w)$，而由推论 1.6 (1.5 节) 知在 J 的外区域 $\chi(J,w)=0$，在 J 的内区域 $\chi(J,w)=\pm 1$. 因此 $f(z)$ 在 D 中

不取外区域[1]的值，并且取内区域的每一值恰好一次。又因 $f(D)$ 是开集，故不取 J 上的值。

定理 1.1 设 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析．若 $|z|\to 1$ 时 $g(z)$ 的所有极限点的集 A 有界，无内点，且不分割 $\mathbf{C}$．则 $g\in\Sigma$，且 $g(\Delta)=\hat{\mathbf{C}}\backslash A$．

这一定理也许令人惊奇．值得说明的是，正是 A 不分割 $\mathbf{C}$ 的假定排除了映像的“重叠”．

证 我们必需证明 $g(z)-w$ 在 Δ 内的零点个数 $n(w)$ 当 $w\notin A$ 时等于 1，当 $w\in A$ 时等于 0．

先设 $w\notin A$．因为 A 有界且不分割 $\mathbf{C}$，故存在从 w 到 ∞ 的曲线 B 不与 A 相交(见图 1.1)．设 $1<r_1<r_2<\infty$，考虑曲线 C_j: $g(r_je^{it})$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，$(j=1,2)$．由 A 的定义，可选取 r_1 充分接近于 1[2]，使得对于 $1<|z|\leqslant r_1$，$g(z)\notin B$，故 $g(z)\neq w$．从而 w 位于 $\mathbf{C}\backslash C_1$ 的无界分集，所以 $\chi(C_1,w)=0$．若选取 r_2 如此之大使得对于 $|z|\geqslant r_2$，$g(z)\neq w$，则 $n(w)$ 等于 $g(z)-w$ 在圆环 $\{r_1<|z|<r_2\}$ 内的零点个数．因 $g(z)$ 在 $1<|z|<\infty$ 内解析，故由辐角原理得到

$$
\begin{aligned}
n(w)&=\chi(C_2,w)-\chi(C_1,w)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{d\omega}{\omega-w}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2}\frac{f'(z)dz}{f(z)-w}\\
&=1.
\end{aligned}
$$

在上述演算中，我们作了代换，然后应用了留数定理。

现在假定有 $w_0\in A$，$n(w_0)\neq 0$，则存在 $z_0\in\Delta$ 满足 $g(z_0)=w_0$．选取 $r_0>1$ 和以 z_0 为心的小圆盘 D_0，使得圆环

$$R=\{1<|z|<r_0\}$$

不与 D_0 相交．于是有 $g(R)\cap g(D_0)\subset A$，因为否则将存在点 $w\notin A$，函数 $g(z)$ 在 R 和 D_0 内都取到该值，这与第一部分相矛盾．由于集 A 无内点，故开集 $g(R)\cap g(D_0)$ 必为空集，但这是不

1) 此处原文为“内区域”，系误．——译者注

2) 此处原文为“充分小”．——译者注

可能的，因为 $w_0\in g(D_0)$ 并且 $w_0\in A\subset\overline{g(R)}$。

例 1.2 设 $g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}$。由

$g(e^{i\theta})=b_0+2e^{i\beta}\cos(\theta-\beta)$，知 $\{g(z):|z|=1\}$

是线段 $[b_0-2e^{i\beta}, b_0+2e^{i\beta}]$。于是由定理 1.1 推出 $g\in\Sigma$，并且 $E(g)$ 即该线段。

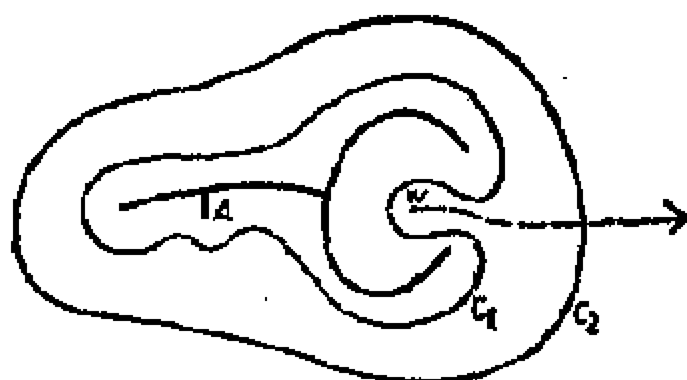


图 1.1

例 1.3 设 $0<\alpha<\pi, \rho=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}(>1)$。则

$$g(z)=\rho z\frac{z+\rho}{\rho z+1}=z+\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)+\cdots \tag{5}$$

在 $1\leqslant|z|<\infty$ 内解析。经计算得 $g(e^{i\theta})=\rho\exp[2i\arg(e^{i\theta}+\rho)]$。几何上的考虑表明，辐角 $\arg(e^{i\theta}+\rho)$ 在

$$-\frac{\pi+\alpha}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi+\alpha}{2}$$

内从 $-\dfrac{\alpha}{2}$ 增加到 $\dfrac{\alpha}{2}$，在余补区间内再从 $\dfrac{\alpha}{2}$ 减小到 $-\dfrac{\alpha}{2}$。因此

$$\{g(z):|z|=1\}=\{\rho e^{it}:-\alpha\leqslant t\leqslant\alpha\}, \tag{6}$$

由定理 1.1 知 $g(z)$ 属于 Σ 且把 Δ 映照成沿圆弧 (6) 切开的平面。由(5)式知函数 $g(z)-\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)$ 属于 Σ_0，但它可以取 0 值。

例 1.4 考虑函数

$$f(z)=\frac{z}{1-2z\cos\alpha+z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}z^n\ (0<\alpha<\pi).$$

由例 1.2，函数 $\frac{1}{f(z^{-1})}=z-2\cos\alpha+z^{-1}$ 属于 Σ，且当 $|z|>1$ 时不为零. 因此 $f\in S$ 且

$$\mathbf{C}\backslash f(D)=\left(-\infty,-\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}},+\infty\right).$$

4. 我们将需要一个经典结果—解析的格林 (Green) 公式.

定理 1.2 设分段光滑曲线 C 关于区域 $H\subset\mathbf{C}$ 同调于零. 若 $h(w)$ 在 H 内解析，则

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C\overline{h(w)}\ h'(w)dw=\frac{1}{\pi}\iint_H \chi(C,w)|h'(w)|^2d\Omega.$$

C 同调于零的假定意味着当 $w\notin H$ 时环绕次数 $\chi(C,w)=0$，故在 ∂H 的某邻域内亦然. 将 H 稍加变动，便可假定 $h(z)$ 在 $\overline{H}$ 解析. 对 $w\in C$，$\chi(C,w)$ 无定义的这一事实是无关紧要的，因为 C 分段光滑，因而其面积为零.

证 可将(7)式右边写成

$$(8)\qquad \frac{1}{\pi}\iint_H|h'(w)|^2\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dz}{z-w}\right)d_w\Omega$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left(\frac{1}{\pi}\iint_H\frac{|h'(w)|^2}{z-w}d_w\Omega\right)dz.$$

设 $D_0=\{|z-z_0|<r\}$ 为任一满足 $\overline{D}_0\subset H$ 的圆盘，则当 $z\in D_0$ 时有

$$(9)\qquad \iint_H\frac{|h'(w)|^2}{z-w}d\Omega=\iint_{H\backslash D_0}\frac{|h'(w)|^2}{z-w}d\Omega$$
$$-\iint_{D_0}\overline{h'(w)}\frac{h'(w)-h'(z)}{w-z}d\Omega$$
$$+h'(z)\iint_{D_0}\frac{\overline{h'(w)}}{z-w}d\Omega.$$

应用柯西 (Cauchy) 积分公式与柯西积分定理，可证明最后一个

积分的共轭等于

$$\int_0^r\int_0^{2\pi}\frac{h'(z_0+\rho e^{i\theta})}{\bar{z}-\bar{z}_0-\rho e^{-i\theta}}\rho d\rho d\theta=2\pi\int_0^{|z-z_0|}\frac{\rho}{\bar{z}-\bar{z}_0}$$

$$\cdot h'\left(z_0+\frac{\rho^2}{\bar{z}-\bar{z}_0}\right)d\rho=\pi(h(z)-h(z_0)).$$

因为(9)式中第二、第三两个积分都关于 $z\in D_0$ 解析，于是推出函数

$$\frac{1}{\pi}\iint_H\frac{|h'(w)|^2}{z-w}d\Omega-\overline{h(z)}h'(z)\tag{10}$$

在 D_0 内解析，且由 D_0 的任意性知在H内解析。因此从(8)式及柯西积分定理 (Ahlfors 145 页)便推出(7)式。

应用若当曲线定理还可推出：

推论 1.1 设 $g\in\Sigma$，$H(r)$ 是曲线 $C(r):g(re^{i\theta})$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 的内区域，若对某个 $r_0>1$，$h(w)$ 在 $H(r_0)$ 内解析，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)}\overline{h(w)}h'(w)dw=\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2d\Omega\tag{11}$$

$$(1<r<r_0).$$

事实上，若 w 位于 $C(r)$ 的内区域，则 $\chi(C(\rho),w)$ 连续从而对 $r\leqslant\rho<\infty$ 是常数。因为由(2)式知对足够大的 ρ 有

$$\chi(C(\rho),w)=1,$$

故得 $\chi(C(r),w)=1$；而在外区域有 $\chi(C(r),w)=0$。

问　　题

1. 证明多项式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 在 D 内单叶当且仅当 (Dieudonné 1931a)

$$\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\frac{\sin\nu\theta}{\sin\theta}z^{\nu-1}\neq 0\quad\left(|z|<1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

2. 设 $f(z)$ 在 D 内单叶，$f(0)=0$。试证明 $f(z)=-f(-z)$ 当且仅当像域关于 0 点对称。

3. 设 J 为解析若当曲线，w_1，w_2，w_3 是 J 上互不相同的点。试证明，给定三个不同点 z_1，z_2，$z_3\in\partial D$，存在唯一的函数 $f(z)$在 $\bar{D}$ 单叶，使得 $f(D)$

是 J 的内区域或外区域，且 $f(z_j)=w_j(j=1,2,3)$。

4. 设 $f_1(z)$ 是满足 $f_1(D)=G$ 的某个单叶函数。试证明黎曼映照定理中的函数可写成

$$f(z)=f_1\left(\frac{cz+z_0}{1+\bar{z}_0cz}\right)\ (z_0\in D,|c|=1),$$

并推导出内映照半径公式

$$r_0(G,f_1(z_0))=(1-|z_0|^2)|f_1'(z_0)|.$$

5. 设 $0<\alpha<2$。试证明函数

$$\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]=z+\alpha z^2+\cdots$$

属于 S，且把 D 映照成角度为 $\pi\alpha$ 的一个扇形。当 $\alpha\to 0$ 时有何结果？

6. 设 G 为若当区域。假设 $g(z)$ 在 D 内解析有界，且当 $|z|\to 1$ 时 $g(z)$ 的所有极限点都在 ∂G 上。试证明 $g(D)=G$，且取 G 内每一值的次数相同，并为有限次（简化为 $G=D$ 时的结论，并应用鲁歇（Rouché）定理于 ∂D）。

7. 设 $f(w)$ 与 $g(w)$ 在 H 内解析，且 C 关于 H 同调于零。试从定理 1.2 推出等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\overline{f(w)}g'(w)dw=\frac{1}{\pi}\iint_H \chi(C,w)\overline{f'(w)}\,g'(w)d\Omega.$$

1.2 经典的偏差定理

本节我们罗列一组定理，这些定理是关于单叶函数的最早的一批精确结果（参看 Koebe 1907，Gronwall 1914/15，Bieberbach 1916 a,b）。

首先研究 Σ 类。约定

$$g(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}\quad(|z|>1),\tag{1}$$

并以 $E=E(g)$ 表示像域的余集。我们的讨论以如下的所谓面积定理为基础。

定理 1.3 设 $g\in\Sigma$，则

$$\text{area}\,E=\pi\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\right).\tag{2}$$

定理中的面积是紧集 E 的二维勒贝格测度。设 $H(r)=\mathbb{C}\setminus\{g(z):|z|\geqslant r\}(r>1)$；这是由解析若当曲线 $C(r):g(re^{it})$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 界成的集合。因为集 E 是递增集合 $H(r)$ 的交，而知

$$\text{area}E=\lim_{r\to 1}\text{area}H(r). \tag{3}$$

若取(3)式作为定义，便无需勒贝格理论.

证 对 $h(w)=w$ 应用解析的格林公式得到

$$\frac{1}{\pi}\text{area}H(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}re^{it}g'(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt,$$

利用 $g(z)$ 的展开式(1)可推出

$$\frac{1}{\pi}\text{area}H(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(re^{it}-\sum_{n=1}^{\infty}nb_nr^{-n}e^{-int}\right)\cdot\left(re^{-it}+\sum_{n=0}^{\infty}\bar{b}_nr^{-n}e^{int}\right)dt=r^2-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2r^{-2n}; \tag{4}$$

其中由于级数的一致收敛性，所以能够逐项积分。因面积非负而推出

$$\sum_{n=1}^{m}n|b_n|^2r^{-2n}\leqslant r^2\quad(m=1,2,\cdots;r>1).$$

若先令 $r\to 1$，再令 $m\to\infty$，便知 $\Sigma n|b_n|^2$ 收敛。于是在(4)式中取 $r\to 1+0$ 时的极限，再由(3)式便得出(2)式.

等式(2)表明 $\text{area}E\leqslant\pi$。另一方面，$\text{area}E\geqslant 0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2\leqslant 1, \tag{5}$$

等号成立当且仅当 $\text{area}E=0$。由此直接推出(对照例 1.2)：

推论 1.2 设 $g\in\Sigma$。则 $|b_1|\leqslant 1$，等号成立当且仅当

$$g(z)=z+b_0+e^{2i\beta}z^{-1}(b_0\in\mathbb{C},\beta\in\mathbb{R}).$$

使一个给定的不等式等号成立的函数称为极值函数。该极值函数的确定似乎没有多大裨益，但在关于任何多连通区域均可映照为平行割线区域的一个熟知的证明(Golusin 178 页)中恰恰需要推论 1.2 的这一部分。

经典方法的思想是对原来的函数进行适当变换再应用不等式 $|b_1|\leqslant 1$，从而使这一结果得到更加有效的运用．下一个引理便给出这样一个变换；其进一步应用见(10)式及问题5，6，8．

引理 1.2 若 $g\in\Sigma$，$w\in E$，则

(6) $$g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}=z+\frac{1}{2}(b_0-w)z^{-1}+\cdots$$
$$(|z|>1)$$

是 Σ 中的一个奇函数．若 $f\in S$，则 $\sqrt{f(z^2)}$ 是 S 中的一个奇函数．

证 偶函数 $z^{-2}(g(z^2)-w)$ 在单连通区域 Δ 内解析且不等于零，因此奇函数

$$g^*(z)=z[z^{-2}(g(z^2)-w)]^{\frac{1}{2}}=z[1+(b_0-w)z^{-2}+\cdots]^{\frac{1}{2}}$$
$$=z+\cdots$$

在 $1<|z|<\infty$ 内解析，且在 ∞ 邻域具有展开式(6)．若

$$g^*(z_2)=g^*(z_1)，\text{则 } g(z_2^2)=g(z_1^2)，$$

因 $g(z)$ 单叶而知 $z_2=\pm z_1$．减号是不可能的，因为

$$g^*(-z_1)=-g^*(z_1)\neq g^*(z_1).$$

因此 $g^*(z)$ 在 Δ 内单叶．第二部分可用同样的方法证明．

定理 1.4 设 $g\in\Sigma$，则

$$E\subset\{|w-b_0|\leqslant 2\}，$$

等号成立当且仅当 E 是长度为4的线段．

证 应用推论1.2于函数(6)知对于 $w\in E$ 有

$$\frac{1}{2}|w-b_0|\leqslant 1.$$

若等号成立，则必有

$$g^*(z)=\sqrt{g(z^2)-w}=z-e^{i\beta}z^{-1}，$$

β 是某个实数，因而

(7) $$g(z)=z+(w-2e^{i\beta})+e^{2i\beta}z^{-1}.$$

于是从例1.2推出关于等号的结论．

推论 1.3 若 $g\in\Sigma_0$，则当 $|z|>1$ 时有 $|g(z)|\leqslant 2|z|$.

证 因当 $|\zeta|\to 1$ 时 $g(\zeta)$ 的所有极限点皆属于 E，且函数 $g(\zeta)/\zeta$ 在 ∞ 解析，由最大值原理推出

$$\left|\frac{g(z)}{z}\right|\leqslant\limsup_{|\zeta|\to 1}\left|\frac{g(\zeta)}{\zeta}\right|=\max_{w\in E}|w|\leqslant 2\quad(|z|>1).$$

现在转向研究 S 类.

定理 1.5 若 $f\in S$，则

$$|a_2|\leqslant 2,\quad |a_3-a_2^2|\leqslant 1,\tag{8}$$

且 $|a_2|=2$ 成立当且仅当 $f(z)$ 是寇勃函数的旋转；进而若 $f(z)$ 为奇函数则 $|a_3|\leqslant 1$，等号成立当且仅当

$$f(z)=z(1-e^{2i\beta}z^2)^{-1}\quad(\beta\in\mathbb{R}).$$

证 因函数

$$g(\zeta)=\frac{1}{f(\zeta^{-1})}=\zeta-a_2+(a_2^2-a_3)\zeta^{-1}+\cdots(|\zeta|>1)\tag{9}$$

属于 Σ 且满足 $g(\zeta)\neq 0$，故由推论 1.2 与定理 1.4 即得 $|a_2|\leqslant 2$，$|a_2^2-a_3|\leqslant 1$. 若 $|a_2|=2$ 则从(7)式(取 $w=0$)知对于某个 $\beta\in\mathbb{R}$，

$$\frac{1}{f(z)}=z^{-1}-2e^{i\beta}+e^{2i\beta}z=z^{-1}(1-e^{i\beta}z)^2.$$

若 $f(z)$ 是奇函数则 $a_2=0$，故 $|a_3|\leqslant 1$，并且从(9)式及推论 1.2 便得出等号的结论.

刚才已经证明 $|f''(0)|/2=|a_2|\leqslant 2$. 我们将把该结果从 0 点转换到任意点 $z_0\in D$. 函数

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)&=f(z_0)+(1-|z_0|^2)f'(z_0)\zeta\\&+\frac{1}{2}[(1-|z_0|^2)^2f''(z_0)-2\bar{z}_0(1-|z_0|^2)f'(z_0)]\zeta^2\\&+\cdots\end{aligned}$$

在 D 内仍解析单叶. 从而其相应的标准化函数

$$(10)\quad h(\zeta)=\frac{f\left(\dfrac{\zeta+z_0}{1+\bar{z}_0\zeta}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

$$=\zeta+\left[\frac{1}{2}(1-|z_0|^2)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}-\bar{z}_0\right]\zeta^2+\cdots$$

属于 S. 我们称 $h(\zeta)$ 是 f 关于 z_0 点的寇勃变换。由定理 1.5，知 $h(\zeta)$ 的第二项系数的模小于或等于 2. 若再乘以 $2|z_0|/(1-|z_0|^2)$，然后以 z 代 z_0，便得到：

引理 1.3 若 $f\in S$，则

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right|\leqslant\frac{4|z|}{1-|z|^2}\quad(|z|<1).$$

下面我们来推导寇勃偏差定理.

定理 1.6 若 $f\in S$，则对 $z\in D$，

$$(11)\qquad \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

$$(12)\qquad \frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

$$(13)\qquad \frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

在每一个不等式中，当且仅当 f 是寇勃函数的一个适当的旋转时等号成立.

(11)式的证明 由引理 1.3，

$$(14)\quad \left|\frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^2)f'(re^{i\theta})]\right|$$

$$=\left|-\frac{2r}{1-r^2}+e^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|\leqslant\frac{4}{1-r^2}.$$

因 $f'(0)=1$，取 $\theta=\arg z$，我们推出

$$(15)\quad |\log[(1-|z|^2)f'(z)]|$$

$$\leqslant\int_0^{|z|}\left|\frac{\partial}{\partial r}\log[(1-r^2)f'(re^{i\theta})]\right|dr\leqslant2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

在第一个表达式中取实部，便得

$$-2\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\leqslant\log[(1-|z|^2)|f'(z)|]\leqslant 2\log\frac{1+|z|}{1-|z|},$$

此式等价于(11)式.

如果对于某个点 $z=z_1$，(11) 式中的一个不等式等号成立，那末如(15)式所示，对于 $z=rz_1$，$0\leqslant r\leqslant 1$，(14) 式必须是等式. 取 $r=0$ 就得到 $|f''(0)|=4$， 定理 1.5 表明 f 是寇勃函数的旋转. 相反，对于每个给定的 $z\in D$ 和寇勃函数的一个适当旋转，(11)，(12)和(13)式中等号显然成立.

(12)式的证明 因 $f(0)=0$，从(11)式的上方估计推出

$$|f(z)|\leqslant\int_0^{|z|}|f'(re^{i\theta})|dr\leqslant\int_0^{|z|}\frac{1+r}{(1-r)^3}dr$$

$$=\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

(12)式的下方估计不能如此直接得出. 给定 $0\leqslant r<1$，只需对最接近 0 的点 $f(z_0)$($|z_0|=r$) 作出证明就足够了. 因函数 f 单叶，线段 $[0, f(z_0)]$ 的原像 R 是 $\{|z|\leqslant r\}$ 内的一段弧，故由(11)式有

$$|f(z_0)|=\int_{f(R)}|dw|=\int_R|f'(z)||dz|$$

$$\geqslant\int_R\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}|dz|\geqslant\int_R\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}d|z|$$

$$=\frac{r}{(1+r)^2}.$$

由于(12)式是由(11)式经积分推得，故(12)式中每个不等式的等号只对寇勃函数的适当旋转成立.

(13)式的证明 考虑寇勃变换 (10)，它仍属于 S. 取 $\zeta=-z_0$，因 $f(0)=0$ 而知

$$\left|z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right|=\frac{1}{1-|z_0|^2}\left|\frac{z_0}{h(-z_0)}\right|.$$

故由(12)式便得出(13)式及关于等号的断言.

推论 1.4 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，令 $F = f(D)$. 则

(16) $$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leqslant \operatorname{dist}(f(z), \partial F)$$
$$\leqslant (1-|z|^2)|f'(z)| \quad (|z|<1),$$

并且这些不等式是最佳的. 特别，若 $f \in S$，则

(17) $$\frac{1}{4} \leqslant \operatorname{dist}(0, \partial F) \leqslant 1.$$

证 首先证明(17)式. 因 $f \in S$[1]，由(12)式，

$$\operatorname{dist}(0,\partial F) = \liminf_{|z|\to 1} |f(z)| \geqslant \lim_{|z|\to 1} \frac{|z|}{(1+|z|)^2} = \frac{1}{4}.$$

另一方面，因 $z^{-1}f(z) = 1 + \cdots$ 在 D 内解析且不等于零，则由最小值原理得到

$$\operatorname{dist}(0, \partial F) = \liminf_{|z|\to 1} |f(z)| = \liminf_{|z|\to 1} \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leqslant 1.$$

将(17)式应用于由(10)式定义的寇勃变换. 注意到即使 f 非标准化，$h(\zeta)$ 亦属于 S. 由

$$\operatorname{dist}(f(z_0), \partial F) = \operatorname{dist}[0, \partial h(D)](1-|z_0|^2)|f'(z_0)|,$$

立即推出(16)式. (16)式中的等号分别对寇勃函数与恒等函数成立.

问　　题

1. 设 $g \in \Sigma$，试利用

$$\int g'(z) z^{-1} dz = 2\pi i^{2)},$$

证明任何环绕 $B(g)$ 的曲线其长度大于或等于 2π. 并由此导出等周不等式，即在所有具有给定长度的曲线中圆周所包围的面积最大.

2. 设 $f \in S$ 且 $a_2 \in \mathbb{R}$. 试证明 $|a_3 - a_2^2| = 1$ 只对例 1.4(1.1 节)中的全体函数才成立.

---

1) 此处原文为"因 $f(z)$ 在 D 内单叶."——译者注

2) 原文误为 $\int g(z) z^{-1} dz = 2\pi i$.——译者注

3. 试通过对系数的考察证明 S 中两函数 $z(1\pm z)^{-2}$ 的算术平均不属于 S（对照 A. W. Goodman 1968b）。

4. 设 $m=2,3,\cdots,f\in S$。试证明

$$(*)\qquad f_m(z)=f(z^m)^{\frac{1}{m}}$$

属于 S，并且 $f_m(D)$ 为 m 折对称区域，即该区域经旋转 $w\mapsto e^{2\pi i/m}w$ 不变。

5. 设函数 $f_m\in S$，其像域 m 折对称。试证明对于某个 $f\in S$，函数 f_m 具有(*)的形式，并推导出估计式

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^{2/m}}\leqslant|f_m(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^{2/m}}.$$

此结果是最佳的吗？

6. 设 $g\in\Sigma_0$，试证明

$$|g(z)|\leqslant|z|+\frac{1}{|z|}\quad(|z|>1).$$

（Löwner 1919；对 $g(\varphi(\zeta))$ 应用定理 1.4，其中 $\varphi(\zeta)$ 把 Δ 映照成 Δ 减去一条适当的径向割线）。

7. 对于 $f\in S$，试应用题 6 的结果证明

$$|f(z)|\geqslant r/(1+|a_2|r+r^2)\quad(|z|=r<1).$$

8. 设 $f\in S$ 且 $|f(z)|<M$。试证明

$$|a_2|\leqslant 2(1-M^{-1}),\ \operatorname{dist}(0,\partial f(D))\geqslant(1+\sqrt{1-M^{-1}})^{-2}$$

（Pick 1917；对适当的 α 考虑 $g(\zeta)=f(\zeta^{-1})^{-1}+e^{i\alpha}M^{-2}f(\zeta^{-1})$）。

9. 试证明：若 $f\in S$，则 $\log f'(z)$ 的幂级数之系数有界。

10. 试证明：一个 ρ 级整函数 $\left(\rho<\frac{1}{2}\right)$，若在任何伸向 ∞ 的若当弧 Γ 上有界，则必为常数。（维曼（Wiman）定理；令 $f(D)=\mathbb{C}\backslash\Gamma$，将经典的弗拉格曼-林德洛夫（Phragmén-Lindelöf）定理[参看 Polya-Szegö 卷 I，147 页]应用于函数 $g\left(f\left(\frac{s-1}{s+1}\right),\ \operatorname{Re}s>0\right)$。

1.3 比伯巴赫猜想

比伯巴赫猜想是说：在 S 内所有函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\quad(|z|<1)$$

之中，窟封函数具有最大系数，即

$$|a_n| \leqslant n \quad (n=2, 3, \cdots; f \in S).$$

为了解决这个问题已产生了研究单叶函数的许多方法. 比伯巴赫猜想虽然至今仍未证实，但已证明它是检验各种方法的试金石.

1. 第一个结果 $|a_2| \leqslant 2$，由比伯巴赫在 1916 年证明. 这结果也可容易地用多种方法证明.

娄威纳 (Löwner 1923) 通过引入娄威纳微分方程(见 6.1 节)证明了

$$|a_3| \leqslant 3.$$

沙非尔与斯潘塞尔 (Schaeffer and Spencer 1943) 用变分方法(见 7.2 节) 又给出一个证明. 珍肯斯 (Jenkins 1960a) 利用二次微分(见第八章)证明的一个系数不等式蕴含 $|a_3| \leqslant 3$. 我们将借助格隆斯基 (Grunsky) 不等式的格拉贝定-谢非尔 (Garabedian-Schiffer) 推广再给出这一不等式以新证明(见 4.4 节).

格拉贝定与谢非尔(1955a)用变分方法得出

$$|a_4| \leqslant 4.$$

查尔缅斯基 (Charzyński) 与谢非尔 (1960a) 用同一方法给出一个较短的证明，这两位作者 (1960b) 还借助格隆斯基不等式 (见 3.3 节) 给出一个更简单的证明. 彼德松 (Pederson 1968a) 和奥扎瓦 (Ozawa 1969a, b) 也利用格隆斯基不等式证明了

$$|a_6| \leqslant 6.$$

遗憾的是该证明太长，不能纳入本书之中. 沿着同一途径，奥扎瓦与库玻塔 (Kubota 1970) 证明了只要 $a_2 \geqslant 0$ 则 $\mathrm{Re}\, a_8 \leqslant 8$.

利用格拉贝定-谢非尔不等式，彼德松与谢非尔(1972)已证明

$$|a_5| \leqslant 5.$$

本书也不能纳入这一证明.

2. 对系数全体的第一个较好的估计由李特伍德 (Littlewood 1925) 给出，他证明了 $|a_n| < en$. 以后，对 n 的系数因子得出了一系列更好的估计，其中特别要提到巴西列维奇(Bazilevič, 例如

他 1951 年的论文)。1965 年米林 (Milin) 提出一个从格隆斯基不等式出发获得更进一步结果的新方法(见 3.5 节),并证明 $|a_n| < 1.243n$. 通过对格隆斯基不等式的另一种巧妙的应用，费茨盖拉德 (FitzGerald 1972) 已证明(见 3.4 节)

$$|a_n| \leqslant \sqrt{\frac{7}{6}}\, n < 1.081n \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

海曼 (Hayman 1955a) 证明了对于每个 $f \in S$,

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{n} \leqslant 1$$

存在，且 $\beta = 1$ 只对于寇勃函数的旋转成立。比伯巴赫猜想的这一渐近形式意味着要么 $|a_n| = n (n = 2, 3, \cdots)$ 否则 $|a_n| < n$ $(n > n_0(f))$.

G. 爱利格 (G. Ehrig 1974a,b) 利用费茨盖拉德不等式已经证明

(1) $\quad |a_2| < 1.70$ 或 $|a_3| < 2.43 \Rightarrow |a_n| < n \; (n > N)$,

其中 N 是绝对常数(比较在 3.5 节中证明的阿哈罗诺夫(Aharonov)的结果).

对于各种子类，特别是星形函数 (Löwner 1917; 见 2.2 节), 近于凸函数 (Reade 1955; 见 2.3 节), 以及实系数单叶函数 (Dieudonné 1931b, Rogosinski 1932; 见 2.3 节), 估计式 $|a_n| \leqslant n$ $(n = 2, 3, \cdots)$ 已得到证明。这一方面的另一结果是

$a_2, \cdots, a_p$ 是实数 $\Rightarrow \operatorname{Re} a_n \leqslant n \; (n = 2, 3, \cdots, 2p + 1)$.

(Obrock 1966, Schiffer 1967, G. S. Goodman 1967.)

3. 关于比伯巴赫猜想的"局部"形式有一些有趣的结果，本书未能涉及。第 n 个**系数体**定义为

$$V_n = \{(a_2, \cdots, a_n); f \in S\} \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

(Peschl 1937). 在沙菲尔与斯潘塞尔的书中有关于 V_n 的丰富知识，书中除大量定性结果外还借助插图对 V_3 作了完整的描述.

"寇勃点" $(2, \cdots, n) \in V_n$ 的邻域具有特殊的重要性. 已发现，若 $(a_2, \cdots, a_n)$ 充分接近寇勃点，则 $\operatorname{Re} a_n \leqslant n$. 对偶数的

n，这一"局部"结果是由格拉贝定、罗斯（Ross）和谢菲尔（1965）利用格隆斯基不等式证明的；对奇数的 n，则是由格拉贝定与谢菲尔（1967）利用他们对格隆斯基不等式的推广证明的。彭比利（Bombieri 1967）证明了同样的结果，并表为如下醒目的形式：存在正常数 α_n 与 δ_n 使得

$$\operatorname{Re} a_n < \begin{cases} n - \alpha_n(2 - \operatorname{Re} a_2), \text{若 } n \text{ 为偶数}, |2 - a_2| < \delta_n, \\ n - \alpha_n(3 - \operatorname{Re} a_3), \text{若 } n \text{ 为奇数}, |3 - a_3| < \delta_n. \end{cases}$$

他是结合使用娄威纳方法和变分方法得出此结果的（Duren and Schiffer 1962/63）；也见蒙代尔多（Montaldo 1965）及拢宾松（1969）。

看来在偶次项系数与奇次项系数间有某种差别。例如从格隆斯基不等式就能证明 $|a_4| \leqslant 4$ 和 $|a_6| \leqslant 6$，而为了证明 $|a_3| \leqslant 3$ 和 $|a_5| \leqslant 5$ 就需要更深刻的格拉贝定-谢菲尔不等式。如果考虑这种性质上的差别是否会影响到比伯巴赫猜想的正确性的话，我们说这种影响不会太大，因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup\{|a_n| : f \in S\}$$

存在（Hayman 1958），并且对某个绝对常数 K 有

$$||a_{n+1}| - |a_n|| < K$$

（Hayman 1963；见 3.5 节）。

4. 罗勃松（Robertson 1936a）提出一个更强的猜想。设

$$f^*(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}^* z^{2k+1}$$

是 S 中的一个奇函数。**罗勃松猜想**是说

$$(2) \qquad 1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_{2k+1}^*|^2 \leqslant n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

等号成立，当且仅当 $|a_3^*| = 1$，即 $f(z) = z/(1 - e^{i\theta}z^2)$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$。若 $f \in S$，则 $f^*(z) = \sqrt{f(z^2)}$ 是 S 中一个奇函数，且

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}^* a_{2n-2k-1}^* \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

特别有 $a_3=2a_3^*$.

由薛瓦尔兹 (Schwarz) 不等式，罗勃松猜想(对一个给定的 n)蕴含

$$|a_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_{2k+1}^*|^2 \leqslant n, \tag{3}$$

并且等号只对于寇勃函数及其旋转成立。而且还可看到罗勃松猜想蕴含广义的比伯巴赫猜想 (Rogosinski 1943)：对每个从属于 S 中函数的函数，$|a_n| \leqslant n(n=1,2,\cdots)$ 均成立(1,2 节，特别是推论 2.2)。

对 $n=2,3$，罗勃松猜想已被罗勃松本人证实 (Robertson 1936a)。弗利德兰德 (Fridland 1970；见 3.3 节) 证明了罗勃松猜想对 $n=4$ 也成立。他还证明了其它一些"局部"结果。已知罗勃松猜想对星形函数是成立的 (2.2 节)，广义比伯巴赫猜想对于下列情形也已被证实：当所从属的单叶函数近于凸 (Robertson 1965)，或者具有实系数，或更一般地为典型实照函数 (Rogosinski 1943)。可参看谢尔-斯毛尔的论文 (Sheil-Small 1973)。

对于所有 k，$|a_{2k+1}^*| \leqslant 1$ 的意义下的罗勃松猜想显然不成立，因为已有

$$\max_{f^*} |a_5^*| = \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} \approx 1.013$$

(Fekete and Szegö 1933；见 6.2 节)。已知最好的一致估计为 $|a_{2k+1}^*| < 1.17$，此结果属于米林(1917；见 3.5 节)。

1.4 单叶函数序列

对于某个区域 H 中的解析函数空间来说，最弱的有用拓扑是由在 H 中的局部一致收敛性(即在所有紧子集上一致收敛)所诱导的拓扑。这一拓扑是可度量化的，例如规定距离为

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\tan^{-1}(\max_{z\in A_k}|f(z)-g(z)|),$$

其中 (A_k) 是由紧子集作成的 H 的一个穷尽 (Ahlfors 212 页)。

因而紧性与列紧性同. 每当我们说到函数空间或函数类时，总是使用这一拓扑.

定理 1.7 S 类与 Σ_0 类是紧的.

证 由定理 1.6(1.2 节)有

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| \leqslant r, f \in S),$$

故 S 在 D 内局部一致有界，从而由蒙代尔 (Montel) 定理知 S 是正规族. 由霍尔维兹 (Hurwitz) 定理 (Ahlfors 176 页) 单叶函数局部一致收敛序列的极限函数或为单叶或为常数. 由于 S 中函数的标准化条件 $f'(0)=1$，后一种可能性不会出现，因此 S 是闭的因而是紧的.

由推论 1.3 知类 Σ_0 正规，仍由霍尔维兹定理知 Σ_0 是闭的因而是紧的. 应指出，Σ 类不是紧的(除非引入球面度量)，例如函数 $g_n(z)=z+n(n=1,2,\cdots)$ 就表明了这一点.

2. 卡拉皆屋多利 (Carathéodory 1912) 通过像域的收敛性给出单叶函数收敛性的一个纯几何特征.

设 (F_n) 为一区域列，$F_n \subset \mathbf{C}$, $0 \in F_n$ (亦可用任何其它固定点代替 0). (F_n) (关于 0 点) 的核定义为由 0 点和具有下列性质的所有点 $w \in \mathbf{C}$ 所组成的集:

(∗) 存在域 $H, 0 \in H, w \in H$ 使得对充分大的 $n, H \subset F_n$.

若不存在这样的点，其核为 $\{0\}$. 否则其核是 $\mathbf{C}$ 内包含 0 点的一个区域;也可能为 $\mathbf{C}$. 如果每个子列有相同的核 F，我们就说 (F_n) 收敛于 F (关于 0 点). 这类收敛性也称为核收敛.

这里有一个重要的特殊情形(也可参看问题 2 和 3):

引理 1.4 设 (F_n) 递减，B^0 是集合

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

的内点的集. 那末，若 $0 \in B^0$，则 (F_n) 收敛于 B^0 的包含 0 点的分集 F，若 $0 \notin B^0$ 则 (F_n) 收敛于 $F=\{0\}$.

证 第二个结论的证明是平凡的，故不妨设 $F \neq \{0\}$[1]. 由于 (F_n) 的单调性，当用子列代替 (F_n) 时，区域 F 保持不变. 因而只需证明 (F_n) 以 F 为核就足够了. 显然 F 包含于核内，因为我们在(*)中可选取 $H = F$. 余下是证明核包含于 F. 设 w 是核中的点，H 为依照条件(*)选定的区域. 则因 (F_n) 递减而有 $H \subset B$. 因为 H 是区域，$0 \in H$，故 $H \subset F$，从而 $w \in F$.

例 1.5 考虑去掉两条竖直裂纹的平面

$$F_n = \mathbf{C} \setminus \left\{ 1 + it:\ |t| \geqslant \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

则 (F_n) 递减，且交集

$$B = \{\mathrm{Re}\, w < 1\} \cup \{\mathrm{Re}\, w > 1\} \cup \{1\}^{2)}.$$

因此 $B^0 = B \setminus \{1\}$，$F = \{\mathrm{Re}\, w < 1\}$，故 (F_n) 收敛于 $\{\mathrm{Re}\, w < 1\}$. 若考虑的是关于点 2 的核收敛(其定义方式显而易见)，则其核就是另一半平面；若是关于点 1 的，那么其核就是$\{1\}$.

这样定义的核收敛概念，使得极限集除去退化的情形外总是连通的，并且是开的. 显然这是必要的，因为 D 的像正是这样. 只是所得的极限集也许有点出于意外，如上例所示的那样. 这一概念的正确性已为卡氏核定理所证明.

定理 1.8 设函数 $f_n(z)(n = 1, 2, \cdots)$ 在 D 内解析单叶，且 $f_n(0) = 0, f_n'(0) > 0$，记 $F_n = f_n(D)$. 则 $(f_n(z))$ 在 D 内局部一致收敛当且仅当 (F_n) 收敛于它的核且 $F \neq \mathbf{C}$. 而且极限函数把 D 映照成 F.

证 (a) 假定当 $n \to \infty$ 时 $f_n(z)$ 在 D 内局部一致收敛于 $f(z)$. 下面两段文字将证明，$f(D)$ 就是 (F_n) 的核 F. 由于极限函数或者单叶或为常数，故 $F \neq \mathbf{C}$；又因每个子列 (f_{n_ν}) 也收敛于 f，而知 (F_{n_ν}) 有同样的核 F，所以 (F_n) 收敛于 F.

先证 $f(D) \subset F$，即证明每点 $w_0 \in f(D)$，$w_0 \neq 0$，必满足条

1) 此句系译者所加. ——译者注

2) 此式及下行中原文有遗漏. ——译者注

件(*). (不妨设 $f(z)\not\equiv 0$, 否则就没有什么要证明的了.) 设 $w_0=f(z_0)$ 并选取 r 使 $|z_0|<r<1$. 则区域 $H=\{f(z):|z|<r\}$ 包含 0 与 w_0. 我们来证明对所有足够大的 n, $H\subset F_n$, 从而 w_0 满足条件(*). 假定此事不成立, 则存在序列 (n_k), $n_k\to\infty$ 及点 $w_k\in H$, 使得 $w_k\notin F_{n_k}$. 不妨设 $w_k\to w^*(k\to\infty)$, 其中 $w^*\in\bar{H}$; 因为必要时可以取子序列. 由于当 $z\in D$ 时, $f_{n_k}(z)-w_k=(f_{n_k}(z)-w_k+w^*)-w^*\neq 0$, 又因为 $f(z)$ 不是常数, 故由霍尔维兹定理推出对于 $z\in D$ 有 $f(z)-w^*\neq 0$, 这与 $w^*\in\bar{H}\subset f(D)$ 矛盾.

另一方面, 我们要证明每个满足条件(*)的点 $w_0\neq 0$ 属于 $f(D)$ ($0=f(0)$ 属于 $f(D)$ 是显然的). 按照条件(*), 对 $n>n_0$ 存在区域 H 满足 $0, w_0\in H\subset F_n$. 反函数 $\varphi_n(w)=f_n^{-1}(w)$ 在 H 内解析且满足 $|\varphi_n(w)|<1$. 由蒙代尔定理可以找到在 H 内局部一致收敛的子序列 (φ_{n_ν}), 极限函数 $\varphi(w)$ 满足 $\varphi(0)=0$ 且 $|\varphi(w)|\leqslant 1$, 因而对于 $w\in H$, $|\varphi(w)|<1$. 这就推知 $f_{n_\nu}(z)$ 在 $\varphi(w_0)$ 邻近局部一致收敛. 因 $\varphi_{n_\nu}(w_0)\to\varphi(w_0)$, 且 $w_0=f_{n_\nu}(\varphi_{n_\nu}(w_0))$, 故断定 $w_0=f(z_0)\in f(D)$.

(b) 反过来, 现假设 (F_n) 收敛于它的核 F 并且 $F\neq\mathbb{C}$.

首先证明序列 (f_n) 正规. 由推论 1.4(1.2 节),

$$\left\{|w|<\frac{1}{4}f_n'(0)\right\}\subset F_n.$$

若 $f_n'(0)$ 无界, 则将推出某个子序列 (F_{n_ν}) 以 $\mathbb{C}$ 为核, 而由核收敛的定义 (F_{n_ν}) 却以 $F\neq\mathbb{C}$ 为核. 故 $f_n'(0)$ 有界. 应用定理 1.6 于 S 内函数 $f_n(z)/f_n'(0)$ 得到

$$|f_n(z)|\leqslant f_n'(0)\frac{|z|}{(1-|z|)^2}\quad(|z|<1).$$

因 $f_n'(0)$ 有界而知 (f_n) 局部一致有界, 因此序列正规.

我们断言 (f_n) 在 D 内局部一致收敛. 如若不然, 由常用的正规性论证方法可找到两个子序列 (f_{m_ν}) 和 (f_{n_ν}) 局部一致收敛于不同的极限 f 和 g. 由(a)知 (F_{m_ν}) 和 (F_{n_ν}) 以 $f(D)$ 和 $g(D)$

为核. 因 (F_n) 收敛于 F，由核收敛的定义我们有

$$f(D)=g(D)=F.$$

由于 $f(0)=g(0)=0$，且 $f'(0)\geqslant 0$，$g'(0)\geqslant 0$，从黎曼映照定理的唯一性部分推出 $f(z)\equiv g(z)$($F=\{0\}$ 时的情形是平凡的)，而我们又曾假定这是两个不同的函数. 这就证明 (f_n) 在 D 内局部一致收敛，并由(a)而知极限函数把 D 映照为 F.

一致收敛的情形（与局部一致收敛的情形相对比），将在9.3节讨论.

问　　题

1.泛函 $|a_n|=|a_n(f)|$ 和 $\tan^{-1}(\sup\{|f(z)|:z\in D\})$ 在 S 内是否连续?

2.证明递增区域列收敛于它的并.

3.设 F 是区域，$0\in F$. 试证明：(F_n) 收敛于 F，当且仅当下列两条件得到满足:

(i) 对一切足够大的 n，F 的每一紧子集包含于 F_n;

(ii) 对每点 $c\in\partial F$，存在点 $c_n\in\partial F_n$ 满足 $c_n\to c$ $(n\to\infty)$.

1.5 附录：若当曲线定理

从阿尔福斯（Ahlfor）的书中所建立的一些结果出发，我们来证明平面拓扑的某些基本结论. 用本质上是艾伦伯格（Eilenberg）的方法，我们首先证明叶尼采夫斯基(Janiszewski)定理.

定理 1.9 设 A_1 和 A_2 是两个闭集，$A_1\cap A_2$ 连通. 若点 a 和 b 既不被 A_1 分隔又不被 A_2 分隔，则亦不被 $A_1\cup A_2$ 分隔.

证 可以设 $a=0$，$b=\infty$. 由定理的假设，必存在连接0与∞的曲线 C_j 不与 A_j 相交$(j=1,2)$(图1.2). 因 $\mathbb{C}\backslash C_j$ 的每一分集单连通且不含0与∞，故在 $\mathbb{C}\backslash C_j$ 内存在 $\log z$ 的(单值)分支 $f_j(z)$. 连通集 $A_1\cap A_2$ 恰好位于 $\mathbb{C}\backslash(C_1\cup C_2)$ 的一个分集 F 之中（若 $A_1\cap A_2=\varnothing$ 则可取其任一分集). 因此，可选取 $\log z$ 的一个分支使得对于 $z\in F$，$f_1(z)=f_2(z)$.

因紧集 $A_1\backslash F$ 与 $A_2\backslash F$ 不相交，故可找到不相交开集 V_1 和

V_2 使得

$$A_j \backslash F \subset V_j \subset \mathbb{C} \backslash C_j \quad (j=1,2).$$

定义

$$f(z)=\begin{cases} f_j(z) \text{ 对 } z \in V_j & (j=1,2), \\ f_1(z)=f_2(z) \text{ 对 } z \in F. \end{cases}$$

则 $f(z)$ 在包含 $A_1 \cup A_2$ 的开集 $H=V_1 \cup V_2 \cup F$ 内解析且满足 $\exp f(z)=z(z \in H)$.

假定 $A_1 \cup A_2$ 分隔 0 与∞，则 $\mathbb{C} \backslash (A_1 \cup A_2)$ 的包含 0 点的分集G有界. 用直径 $\delta<\operatorname{dist}(\partial H, \partial G)$ 的正方形网格覆盖平面使得 0 是某个正方形的一个内点(参照 Ahlfors 140 页). 考虑位于G内的那些闭正方形. 以 $Q_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 表示其正向边界，我们定义其周线为 $C=Q_1+\cdots+Q_n$. 凡相邻两正方形 Q_μ, Q_ν 的公共边相消，剩下的边与 ∂G 的距离 $\leqslant\delta$ 故位于H之中，因为 $\partial G \subset \dot{H}$. 由于对 $z \in H$，可从 $\exp f(z)=z$ 推出 $z^{-1}=f'(z)$，从而知环绕次数

$$\chi(C, 0)=\frac{1}{2 \pi i} \int_C z^{-1} d z=0.$$

另一方面，点 0 属于 $G \backslash H$，因而正好位于诸正方形 Q_ν 中之一的内部. 因此，

$$\chi(C, 0)=\sum_{\nu=1}^n \chi(Q_\nu, 0)=1,$$

这与上述结果矛盾.

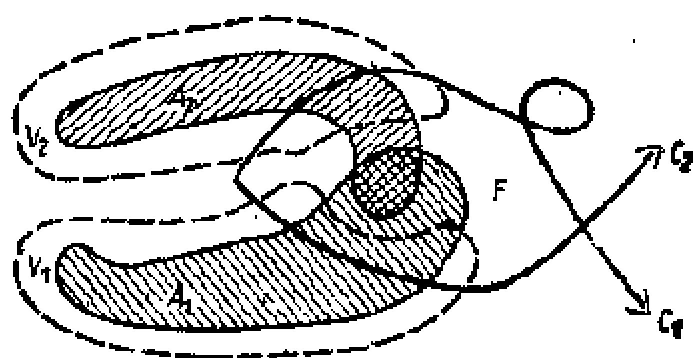


图 1.2

推论 1.5 若 J 是若当弧，则 $\hat{\mathbf{C}}\setminus J$ 是个单一的区域.

证 给定两个点 $a,b\notin J$，我们要证明它们不被 J 分隔. 把 J 划分成一些足够小的子弧 $J_k(k=1,\cdots,m)$，使每段子弧位于一个不含 a,b 的圆盘之中. 这些子弧没有一个分隔 a 和 b. 因 J_1 和 J_2 恰有一个共同点，故从叶尼采夫斯基定理推知 J_1+J_2 不分隔 a 和 b，继续作同样的讨论，最后推出 $J=J_1+\cdots+J_m$ 不分隔 a 和 b.

现在来证明若当曲线定理.

定理 1.10 若 $J\subset\mathbf{C}$ 是一条(闭)若当曲线，则 $\hat{\mathbf{C}}\setminus J$ 恰好有两个分集，并且每个分集都以 J 为边界.

有界分集称为 J 的内区域，包含 ∞ 点的分集称为 J 的外区域. 按定义，一个若当区域就是某条若当曲线的内区域.

证 (a) 设 G 是 $\hat{\mathbf{C}}\setminus J$ 的任何一个(连通)分集. 我们来证明 $\partial G=J$. 由分集的定义，显然有 $\partial G\subset J$. 设 $\zeta\in J$，$z_0\in G$. 选取 J 的子弧 J_n' 满足

$$\zeta\in J_n'\subset D_n=\left\{|z-\zeta|<\frac{1}{n}\right\}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由推论 1.5，余弧 $J_n''=J-J_n'$ 不分隔 z_0 和 ζ. 因而存在一条从 z_0 到 ζ 的曲线 P_n 不与 J_n'' 相交. 设 z_n 是 P_n 与 ∂D_n 的第一个交点. 位于 P_n 上 z_0 与 z_n 之间的弧段既不与 J_n' 也不与 J_n'' 相交，故 $z_n\in G$. 因为 $z_n\to\zeta$，我们即可断定 $\zeta\in\partial G$，从而 $J=\partial G$.

(b) (如图 1.3). 我们总可以找到线段 $S=[\zeta_1,\zeta_2]$ 使之与 J 仅以其端点为公共点. 设 J' 和 J'' 分别是 J 上从 ζ_2 到 ζ_1 和从 ζ_1 到 ζ_2 的两段弧. 则 $C=J'+S$ 是一条若当曲线. 选取一个以 S 的中点为心的圆盘 D_0，使其同 C 仅在 S 上相交. 设 G_1，G_2 是 $\hat{\mathbf{C}}\setminus C$ 的两个分集，它们分别包含构成集合 $D_0\setminus S=D_0\setminus C$ 的两个半圆盘. 根据(a)知 $\hat{\mathbf{C}}\setminus C$ 不存在任何其它分集.

现在我们证明 $G_1\neq G_2$. 若不然，则两点 $z_1\in G_1\cap D_0$ 与 $z_2\in G_2\cap D_0$ 不被 C 分隔. 又由于它们也不被 $(C\setminus D_0)\cup\partial D$ 分隔，并且这两个集具有连通的交集 $C\setminus D_0$，故从叶尼采夫斯基定理可

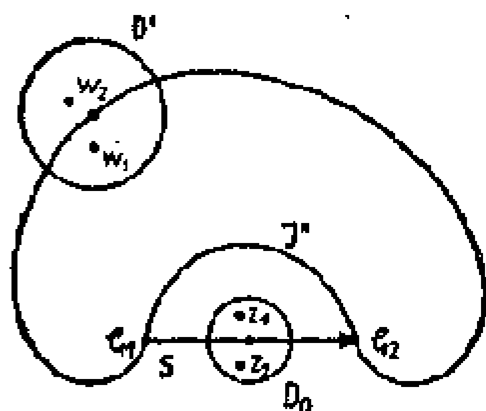


图 1.3

知 z_1 和 z_2 不被它们的并 $C\cup\partial D_0\supset S\cup\partial D_0$ 所分隔，这显然是不对的。因此 $\hat{\mathbb{C}}\backslash C$ 恰有两个分集 G_1 和 G_2。

(c) 设 D' 是以 J' 上某点为心的圆盘，满足 $D'\cap(S\cup J'')=\phi$。我们证明点 $w_1\in D'\cap G_1$ 和 $w_2\in D'\cap G_2$ 被 J 分隔. 如若不然，则因 $(J''\cup S)\cap J=J''$ 连通，并且 w_1 和 w_2 不被 $J''\cup S$ 分隔而由叶尼采夫斯基定理推知它们不被 $(J''\cup S)\cup J=J\cup S$ 分隔，但这是不正确的，因为 G_1, G_2 是 $\hat{\mathbb{C}}\backslash(J'\cup S)$ 的不同分集. 因此 $\hat{\mathbb{C}}\backslash J$ 至少有两个分集 H_1, H_2 满足 $w_1\in H_1$, $w_2\in H_2$[1].

设 H 是 $\hat{\mathbb{C}}\backslash J$ 的任一分集. 由 (a)，必存在 $w\in D'\cap H$，于是对 $j=1$ 或 2 有 $w\in G_j$，从而 w 和 w_j 既不被 $J'\cup S=C$ 分隔又不被 $J''\cup S$ 分隔. 由于 $(J'\cup S)\cap(J''\cup S)=S$ 连通，便知 w 与 w_j 不被 $(J'\cup S)\cup(J''\cup S)=J\cup S$ 分隔，因而不被 J 分隔. 因此，$H=H_j(j=1$ 或 $2)$. 所以 $\hat{\mathbb{C}}\backslash J$ 仅有两个分集 H_1 和 H_2，并且由 (a) 知 $\partial H_1=\partial H_2=J$。

推论 1.6 若 J 是分段光滑若当曲线，则在 J 的内区域 $\chi(J,w)=\pm1$ 而在外区域 $\chi(J,w)=0$。

证 上一个证明的 (c) 中所构造的点 w_1, w_2 分属 $\hat{\mathbb{C}}\backslash J$ 的不同分集. 点 w_j 同 $D_0\backslash S$ 两分集之一的一个适当的点 $z_j(j=1$

---

1) 此处原文误为：$z_1\in H_1$, $z_2\in H_2$.——译者注

或2)属于 $\hat{\mathbb{C}}\setminus C$ 的同一分集。因 $\chi(J''-S, w_j)=0$，从而推出

$$\chi(J, w_j)=\chi(C, w_j)=\chi(C, z_j)\ (j=1,2)。$$

由此即得推论中的结论，因为显然有

$$\chi(C, z_2)=\chi(C, z_1)\pm 1,$$

并且在 $\hat{\mathbb{C}}\setminus J$ 的无界分集内 $\chi(J, z)=0$。

推论 1.7 设 $G\subset\mathbb{C}$ 是区域，H 是若当区域。若 $\partial G\subset\bar{H}$，则 $G\subset H$。

证 设 H^* 是若当曲线 ∂H 的外区域。因 $H^*\cap\partial G=\emptyset$，$G$ 连通且 $\infty\in H^*$，$\infty\notin G$，从而推出 $G\subset\hat{\mathbb{C}}\setminus H^*=\bar{H}$，因 G 是开集故 $G\subset H$。

第二章 某些特殊类

我们先介绍一些由简单几何性质定义的特殊单叶函数类．这些特殊类，除了其本身具有研究价值外，还可作为对困难得多的整个单叶函数类情况的验证．这些类都可用一些简单的不等式来刻划，它们与正实部函数和从属关系有着密切联系．不过在这里我们只能叙述一些基本的结果．

2.1 从属关系与正实部函数

1. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $D=\{|z|<1\}$ 内解析．如果存在 D 内解析函数 $\varphi(z)$（不必单叶），满足 $\varphi(0)=0$，$|\varphi(z)|<1$，使得

(1) $$f(z)=g(\varphi(z))\quad(|z|<1),$$

则称 $f(z)$ **从属于** $g(z)$，并表示为 $f(z)\prec g(z)$．

先证明从属关系的一些基本性质 (Littlewood 1925)．

设 $f(z)\prec g(z)$．则因 $\varphi(D)\subset D$，$\varphi(0)=0$，便由(1)式推出

$$f(D)\subset g(D)\ \text{且}\ f(0)=g(0).$$

于是由薛瓦尔兹引理有 $|\varphi(z)|\leqslant|z|$，因而

(2) $$\{f(z):|z|<r\}\subset\{g(z):|z|<r\}(0<r<1).$$

这就推出

(3) $$\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|\leqslant\max_{|z|\leqslant r}|g(z)|\quad(0\leqslant r<1).$$

因 $(1-|z|^2)|\varphi'(z)|\leqslant 1-|\varphi(z)|^2$ (Ahlfors 136 页)而有

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|f'(z)|&=(1-|z|^2)|\varphi'||g'(\varphi)|\\&\leqslant(1-|\varphi|^2)|g'(\varphi)|.\end{aligned}$$

再次应用 $|\varphi(z)|\leqslant|z|$ 便得

(4) $$\max_{|z|\leqslant r}(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant\max_{|z|\leqslant r}(1-|z|^2)|g'(z)|$$
$$(0\leqslant r<1),$$

特别有 $|f'(0)| \leqslant |g'(0)|$.

最为重要的是从属于单叶函数的情形:

引理 2.1 设 $g(z)$ 在 D 内单叶. 则 $f(z) \prec g(z)$ 当且仅当 $f(0) = g(0)$, $f(D) \subset g(D)$.

证 因为 $g(z)$ 在 D 内单叶, 故反函数 $g^{-1}(w)$ 在 $g(D)$ 内解析. 如果 $f(D) \subset g(D)$, 则 $\varphi(z) = g^{-1}(f(z))$ 在 D 内解析, $|\varphi(z)| < 1$, 并且满足等式 (1). 而 $f(0) = g(0)$ 意味着 $\varphi(0) = 0$. 其逆本节开头已证.

此引理与(2)式结合起来便得到有用的从属原理: 若 $g(z)$ 在 D 内单叶, 则 $f(0) = g(0)$ 与 $f(D) \subset g(D)$ 蕴含 $f(D_r) \subset g(D_r)$, 其中, $D_r = \{|z| < r\}$, $0 < r < 1$.

罗勃松引进关于从属关系的一个稍弱的提法 (Robertson 1970a, b, 还可参照 Sheil-Small 1973):

说 $f(z)$ 拟从属于 $g(z)$, 如果存在 $\varphi(z)$, 使得

$$|f(z)| \leqslant |g(\varphi(z))|, \quad |\varphi(z)| \leqslant |z| \quad (|z| < 1). \tag{5}$$

特别若 $f(z) \prec g(z)$, 或者对 $|z| < 1$ 有 $|f(z)| \leqslant |g(z)|$, 则 (5)式必成立.

(5)式也可写成如下形式:

$$f(z) = \omega(z) g(\varphi(z)) \quad (|z| < 1), \tag{6}$$

其中 $\omega(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在 D 内解析且满足 $|\omega(z)| \leqslant 1$, $|\varphi(z)| \leqslant |z|$.

定理 2.1 设 $0 < \lambda < \infty$, 如果 $f(z)$ 拟从属于 $g(z)$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \quad (0 \leqslant r < 1).$$

对李特伍德的这一基本结果 (Littlewood 1925), 我们只是简略介绍一下它的证明.

若 λ 为整数 (我们只需要这种情形), 对 $g(z)^\lambda$ 应用普阿松 (Poisson) 积分公式即得

$$|g(z)|^\lambda \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^\lambda \operatorname{Re}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}dt \quad (|z| < r < 1).$$

在一般情形下, 利用 $|g(z)|^\lambda$ 为次调和(Ahlfors 237 页), 或者利

用布拉斯克 (Blaschke) 乘积处理 $g(z)$ 的可能零点 (Golusin 324 页或 Hille 422 页)可证明上述不等式仍成立。

因此,根据(5)式,当 $0<\rho<r$,有

$$\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant \int_0^{2\pi}|g(\varphi(\rho e^{i\theta}))|^\lambda d\theta$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^\lambda \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+\varphi(\rho e^{i\theta})}{re^{it}-\varphi(\rho e^{i\theta})}d\theta\right]dt$$

$$=\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^\lambda dt,$$

令 $\rho\to r$ 即得定理的结论。

应用这一定理,可以证明一组罗各辛斯基和罗勃松的系数定理 (Rogosinski 1943, Robertson 1970, a, b):

定理 2.2 设 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ 拟从属于 $g(z)=b_0+b_1z+\cdots$,则

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}|b_\nu|^2 \quad (n=0,1,\cdots). \tag{7}$$

证 根据(6)式可写出等式

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu z^\nu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu z^\nu-\omega(z)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}b_\nu\varphi(z)^\nu$$

$$=\omega(z)\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\varphi(z)^\nu.$$

其特点是左端后两个和只含有次数 $\mu\geqslant n+1$ 的幂 z^μ 而右端的函数拟从属于 $\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu z^\nu$。先应用帕塞伐尔 (Parseval) 公式,然后应用定理 2.1(取 $\lambda=2$)得到

$$\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu|^2r^{2\nu}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\omega(re^{i\theta})\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu\varphi(re^{i\theta})^\nu\right|^2d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n}b_\nu r^\nu e^{i\nu\theta}\right|^2d\theta=\sum_{\nu=0}^{n}|b_\nu|^2r^{2\nu},$$

令 $r\to1$ 即得到(7)式。

推论 2.1 设 $u(z)=1+u_1z+\cdots$ 和 $v(z)=1+v_1z+\cdots$ 在 D 内解析．若

$$\mathrm{Re}\frac{u(z)}{v(z)}>0 \quad (|z|<1),$$

则

$$|u_{n+1}-v_{n+1}|^2\leqslant 4+4\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,u_kv_k \quad (n=1,2,\cdots).$$

证 因 $\mathrm{Re}\,w>0$ 时有 $|(w-1)/(w+1)|<1$，故由薛瓦尔兹引理即得

$$|(u(z)-v(z))/(u(z)+v(z))|\leqslant|z|,$$

因此我们可以对

$$f(z)=(u(z)-v(z))/z=\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1}-v_{k+1})z^k,$$

$$g(z)=u(z)+v(z)=2+\sum_{k=1}^{\infty}(u_k+v_k)z^k,$$

以及 $\varphi(z)\equiv z$ 应用定理 2.2，于是结论容易从(7)式得出．

定理 2.3 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 拟从属于 $g(z)=b_1z+\cdots$ $(b_1\neq 0)$．若对充分小的 z 有

$$\sqrt{z^{-1}g(z)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^\nu, \tag{8}$$

则

$$|a_n|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n-1}|c_\nu|^2 \quad (n=1,2,\cdots).$$

证 对充分小的 z，由(6)式和(8)式得

$$f(z)=\omega(z)\varphi(z)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\varphi(z)^\nu\right)^2$$

$$=\omega\varphi\left[\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu\varphi^\nu\right]^2+2\omega\varphi\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu\varphi^\nu\sum_{\nu=n}^{\infty}c_\nu\varphi^\nu$$

$$+\omega\varphi\left[\sum_{\nu=n}^{\infty}c_\nu\varphi^\nu\right]^2.$$

右端后两项只含有次数 $\mu\geqslant n+1$ 的幂 z^μ，因此第一项中 z 的 n 次幂的系数就是 a_n。因为第一项所表示的函数在 $|z|<1$ 内解析，故

$$a_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\omega(z)\varphi(z)\left[\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu\varphi(z)^\nu\right]^2 e^{-in\theta}d\theta$$

$$(z=re^{i\theta},\ 0<r<1).$$

由定理 2.1（取 $\lambda=2$）[1]，我们得出

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu\varphi(z)^\nu\right|^2 d\theta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}c_\nu z^\nu\right|^2 d\theta$$

$$=r^{-n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|c_\nu|^2 r^{2\nu},$$

令 $r\to1-0$ 便得定理的结论.

下一个结果是上述定理的直接推论：

推论 2.2 设 $g\in S$，并考虑单叶奇函数

$$\sqrt{g(z^2)}=z+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_{2\nu+1}^{*}z^{2\nu+1}\quad(|z|<1),\tag{9}$$

若 $f(z)=a_1z+\cdots$ 从属于 $g(z)$，则

$$|a_n|\leqslant1+\sum_{\nu=1}^{n-1}|b_{2\nu+1}^{*}|^2\quad(n=1,2,\cdots).\tag{10}$$

特别若 $|b_{2k+1}^{*}|\leqslant1$ $(k=1,2,\cdots)$，则 $|a_n|\leqslant n$ $(n=1,2,\cdots)$.

(10) 式表明，罗勃松猜想 (1,3,2) 蕴含了广义比伯巴赫猜想（见 1.3 节）：若 $f(z)\prec g(z)$，$g\in S$，则 $|a_n|\leqslant n$.

关于从属关系的进一步结果，可参看 Golusin（第八章 § 8）；

1) 原文误为：取 $\lambda=1$。——译者注

Littlewood（第二章），Lewandowski 1970，T. H. MacGregor 1967，1972，Robertson 1961，1970a,b，Robinson 1947，Rogosinski 1943 以及 Sheil-Small 1973；也见 2.2 节的问题。

2. 以$\mathscr{P}$表示在D内解析并满足

$$p(0)=1, \quad \mathrm{Re}\,p(z)>0 \quad (|z|<1)$$

的函数$p(z)$的类。由引理 2.1 推知：$p(z)$属于$\mathscr{P}$当且仅当$p(z)\prec(1+z)/(1-z)$。因而从(2)式和(4)式推出

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant|p(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{11}$$

$$|p'(z)|\leqslant\frac{2}{(1-|z|)^2} \quad (|z|<1).$$

这便知类 $\mathscr{P}$ 正规，从而是紧的。

我们给出此类函数的司蒂尔吉斯（Streltjes）积分表示式（Herglotz 1911）及其系数的特征（Carathéodory 1907）。

定理 2.4 设 $p(z)=1+c_1z+\cdots$ 在D内解析。则下列三条件等价：

(i) 函数 $p(z)$ 属于$\mathscr{P}$；

(ii) 存在增函数 $\gamma(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，使得

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,d\gamma(t), \gamma(2\pi)-\gamma(0)=1;$$

(iii) 对 $m=1,2,\cdots$

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}c_{k-l}\lambda_k\bar{\lambda}_l\geqslant 0 \quad (\lambda_0,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{C}),$$

其中约定 $c_0=2$，$c_{-k}=\bar{c}_k$ $(k\geqslant 1)$。

证 (a) 设 $p\in\mathscr{P}$，由菲瓦尔兹公式（Ahlfors 167 页），对于 $|z|<r<1$ 有

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\mathrm{Re}\,p(re^{it})\,dt \tag{12}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{re^{it}+z}{re^{it}-z}\,d\gamma(t,r),$$

其中

$$\gamma(t,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t \operatorname{Re}p(re^{i\tau})d\tau$$

在区间 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 内递增；又因 $p(0)=1$，由(12)式而有 $\gamma(0,r)=0$，$\gamma(2\pi,r)=1$。根据赫利（Helly）选择原理（Natanson 223 页或 Feller 267 页），可以找到序列 (r_n)，$r_n\to 1(n\to\infty)$，使得 $\gamma(t,r_n)$ 收敛于增函数 $\gamma(t)$（$\gamma(t)$ 的不连续点除外）。因此可在(12)式中取极限而得到(ii)。

(b) 设(ii)满足．则系数可表为

$$c_k=2\int_0^{2\pi}e^{-ikt}d\gamma(t)\quad (k=1,2,\cdots). \tag{13}$$

由我们的约定，(13)式对 $k\leqslant 0$ 亦成立。因此

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{m}\lambda_k e^{-ikt}\right|^2 d\gamma(t)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}\lambda_k\bar{\lambda}_l\int_0^{2\pi}e^{-i(k-l)t}d\gamma(t)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m}c_{k-l}\lambda_k\bar{\lambda}_l,$$

因为 $d\gamma(t)\geqslant 0$，从而推出(iii)。

(c) 设 (iii) 满足，对 $k=0,\cdots,m$，我们选取 $\lambda_k=z^k$（$|z|<1$），然后令 $m\to\infty$ 就得到

$$0\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}c_{k-l}z^k\bar{z}^l=2\sum_{k=0}^{\infty}|z|^{2k}$$

$$+2\operatorname{Re}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}c_{k-l}z^{k-l}|z|^{2l}$$

$$=2(1-|z|^2)^{-1}\operatorname{Re}p(z),$$

于是 $p\in\mathscr{P}$。

推论 2.3 设 $p(z)=1+c_1z+\cdots\in\mathscr{P}$，则

$$|c_n|\leqslant 2\quad (n=1,2,\cdots),$$

并且等号当且仅当

$$p(z)=\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\frac{e^{i\alpha+2\pi i\nu/n}+z}{e^{i\alpha+2\pi i\nu/n}-z} \tag{14}$$

时成立，其中 α 是某个实数，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n>0$，$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=1$。

证 由(13)式有

$$|c_n|=2\left|\int_0^{2\pi} e^{-int}d\gamma(t)\right|\leqslant 2\int_0^{2\pi} d\gamma(t)=2,$$

并且等号成立当且仅当 $\gamma(t)$ 除了在形如 $\alpha+2\pi\nu/n$ 的点上具有跳跃 $\gamma_\nu\geqslant 0$ 外为常数。因此由表示式 (ii)即知 $p(z)$ 具有(14)式的形式。

问　　题

假定 $f(z)=a_0+a_1z+\cdots$ 和 $g(z)=b_0+b_1z+\cdots$ 在 D 内解析。

1. 若 $f(z)\prec g(z)$，求证：$|a_2|\leqslant\max(|b_1|,|b_2|)$，

2. 设 $f(z)\prec g(z)$ 且 $g\in S$。求证：$|a_1|\leqslant 1$，$|a_2|\leqslant 2$ 以及

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\quad |f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\quad(|z|<1).$$

并证明不存在相应的下界估计 (Schiffer 1936)。

3. 设 $f(0)=0$，且对 $|z|<1$ 有 $-\alpha<\mathrm{Re}\,p(z)<\beta$。试证明：

$$f(z)\prec\frac{\alpha+\beta}{\pi i}\log\frac{1-e^{-2\pi i\alpha/(\alpha+\beta)}z}{1-z},$$

并推出 $|a_1|\leqslant 2\dfrac{\alpha+\beta}{\pi}\sin\dfrac{\pi\alpha}{\alpha+\beta}$。

4. 设 $|f(z)|\leqslant|f_1(z)\cdot f_2(z)|$ 且

$$f_j(z)\prec\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu^{(j)}z^\nu\quad(j=1,2).$$

试证明：

$$|a_n|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}|b_\nu^{(1)}|^2\sum_{\nu=0}^{n}|b_\nu^{(2)}|^2\quad(n=0,1,\cdots).$$

(Sheil-Small 1973)。

5. 设 $c_0=2$，$c_{n-1}\geqslant c_n\geqslant 0$，$c_{n+1}-2c_n+c_{n-1}\geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$。试证明：$1+c_1z+c_2z^2+\cdots$ 属于 $\mathscr{P}$。

6. 设 $b_{n-1}\geqslant b_n\geqslant 0$，$b_{n+1}-2b_n+b_{n-1}\geqslant 0$ $(n=2,3,\cdots)$。试证明 $f(z)\prec g(z)$ 蕴含 $|a_n|\leqslant b_1$ $(n=1,2,\cdots)$ (Rogosinski 1943)。

2.2 星形函数与凸函数

1.如果函数 $f(z)=a_1z+\cdots$ 单叶并且像域 $F=f(D)$ 关于 0 星形，即

(1) $$w\in F, 0\leqslant t\leqslant 1 \Rightarrow tw\in F,$$

则称 $f(z)$ 在 D 内星形.

现给出星形函数的一个解析特征.

定理 2.5 解析函数 $f(z)$ 在 D 内星形当且仅当 $p(z)=zf'(z)/f(z)$ 属于 $\mathscr{P}$.

证 (a) 设 $f(z)$ 在 D 内星形. 由(1)式及从属原理(2.1 节)推出

$$\{tf(z):|z|<r\}\subset\{f(z):|z|<r\}(0\leqslant t\leqslant 1;0<r<1).$$

因此后一区域仍为星形域. 从几何上考虑知 $\arg f(re^{i\theta})$ 应在区间 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 内递增. 因此

(2) $$\mathrm{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]=\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}[\log f(re^{i\theta})]$$
$$=\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})\geqslant 0,$$

又由于 $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ 而有 $p(0)=1$, 于是推出 $p\in\mathscr{P}$.

(b) 反之，设 $p(z)=zf'(z)/f(z)$ 属于 $\mathscr{P}$. 则对于 $0<|z|<1$, $f(z)\neq 0$, 因为否则 $p(z)$ 就有极点. 若 a_m 是 $f(z)$ 的第一个非零系数，则有 $m=p(0)=1$, 故 $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$. 由(2)式推知: $\arg f(re^{i\theta})$在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 内递增，且总增量为

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(re^{i\theta})d\theta=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right]=2\pi$$
$$(0<r<1).$$

因而从几何上考虑，知 $f(z)$把 $|z|=r$ 一一映照成一条星形解析曲线. 故由引理 1.1 推出 $f(z)$ 在 $|z|<r$ 内单叶，并且对每个 $r<1$, $\{f(z):|z|<r\}$ 星形，从而 $f(z)$ 在 D 内星形.

这一定理的纯分析证明见 6.3 节定理 6.6.

我们再来导出关于星形函数类的一个表示式：

定理 2.6 函数 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在 D 内星形，当且仅当对于某个增函数 $\gamma(t)$，$\gamma(2\pi)-\gamma(0)=1$，有

$$(3)\qquad f(z)=a_1z\exp\left[2\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{1-e^{-it}z}d\gamma(t)\right]\quad(|z|<1).$$

证 设 $f(z)$ 星形. 由定理 2.5 和 2.4 有

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}d\gamma(t),$$

其中函数 $\gamma(t)$ 具有定理中所要求的性质. 因此，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{1}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}}{1-e^{-it}z}d\gamma(t),$$

积分之得到

$$\log\frac{f(z)}{z}-\log f'(0)=-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)d\gamma(t).$$

此式蕴含(3)式. 倒转上述推导过程，即可证明其逆.

例 2.1 设 $\alpha_\nu>0(\nu=1,\cdots,n)$ 且 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=2$. 则

$$f(z)=z\prod_{\nu=1}^{n}(1-e^{-i\theta_\nu}z)^{-\alpha_\nu}\quad(|z|<1)$$

在 D 内星形. 这可以从定理 2.6 通过选取 $\gamma(t)$ 为在点 $\theta_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 具有跃距 $1/2\alpha_\nu$ 的阶梯函数而得到. 寇勃函数与例 1.4 的函数为其特例. 通过考察 $f(e^{i\theta})$，知其像域是平面减去 n 条裂纹，它们作成的扇形角为 $\pi\alpha_\nu(\nu=1,\cdots,n)$. 事实上，对于多数极值问题，考虑这一类型的星形函数就可以了(Robertson 1936b).

例 2.2 设 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 满足

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leqslant 1.$$

则对于 $|z|<1$，

$$|zf'(z)-f(z)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^n$$

$$\leqslant|z|-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^n\leqslant|f(z)|.$$

因此 $|zf'(z)/f(z)-1|\leqslant 1$，于是 $\operatorname{Re} zf'(z)/f(z)>0$。故定理 2.5 表明 $f(z)$ 星形，因而单叶。

2. 如果函数 $f(z)=a_1z+\cdots$ 单叶，并且像域 $f(D)$ 是凸集，则称 $f(z)$ 在 D 内凸 (Study 1913)。例如，$z/(1-z)$ 与 $\log[(1+z)/(1-z)]$ 就是凸函数。

定理 2.7 解析函数 $f(z)$ 在 D 内凸当且仅当

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\in\mathscr{P}. \tag{4}$$

并且若 $f(z)$ 凸，则

$$\operatorname{Re}\left[\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\geqslant 0 \tag{5}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1).$$

不等式 (5) 是谢尔-斯毛尔 (Sheil-Small 1969) 和苏夫利济 (Suffridge 1970) 得到的，该不等式蕴含

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}>\frac{1}{2},\ \operatorname{Re}\frac{f(z)}{a_1z}>\frac{1}{2}\quad(|z|<1). \tag{6}$$

(Marx 1932/33, Strohhäcker 1933)。第一个不等式是 $\zeta=0$ 时的特例。第二个不等式系通过考虑展成关于 z 的幂级数时 z 的系数而得到；这个不等式又可以表为 $z^{-1}f(z)\prec a_1(1-z)^{-1}$，因而蕴含

$$|a_1|\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|f(z)|\leqslant|a_1|\frac{|z|}{1-|z|}\quad(|z|<1). \tag{7}$$

证 (a) 设 $f(z)$ 凸。我们证明 $C(r)=\{f(z):|z|=r\}$ $(0<r<1)$ 是凸曲线。若 $|z_1|\leqslant|z_2|<r$，则

$$tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right)+(1-t)f(z)\in f(D)\quad(|z|<1;0\leqslant t\leqslant 1),$$

于是由从属原理(见 2.1 节)即得

$$tf(z_1)+(1-t)f(z_2)\in\{f(z):|z|<r\},$$

这表明 $\{f(z):|z|<r\}$ 凸，因而 $C(r)$ 是凸曲线。

(b) 设 $f(z)$ 在 D 内凸，因而单叶，则函数

$$g(z,\zeta)=\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}$$

在$|z|<1$，$|\zeta|<1$内解析．这是因为

$$\lim_{\zeta\to z}g(z,\zeta)=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\quad(|z|<1)\tag{8}$$

存在，根据(a)，知$C(r)$是凸曲线，于是$\arg[f(re^{it})-f(re^{i\theta})]$关于$t\in(\theta,\theta+2\pi)$递增．因此当$z=re^{it}\neq\zeta=re^{i\theta}$时，有

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}=\frac{\partial}{\partial t}\arg[f(re^{it})-f(re^{i\theta})]\geqslant 0;$$

又由于此时有$\mathrm{Re}[(z+\zeta)/(z-\zeta)]=0$，我们断定

$$\mathrm{Re}\,g(z,\zeta)\geqslant 0\quad(|z|=|\zeta|=r<1).\tag{9}$$

由连续性推出$z=\zeta$时此式仍成立．先对$|z|<r$然后对$|\zeta|<r$应用最大值原理，便知当$|z|<r$，$|\zeta|<r$时有$\mathrm{Re}\,g(z,\zeta)\geqslant 0$．令$r\to 1$，推出该不等式对$|z|<1$，$|\zeta|<1$也成立，因此容易从(8)式和(5)式得出(4)式．

(c) 反之，假定(4)式成立．曲线$C(r)$的法向角为

$$\Theta(\theta)=\theta+\arg f'(re^{i\theta}),$$

且由(4)式而有

$$\begin{aligned}\Theta'(\theta)&=1+\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\log f'(re^{i\theta})\\&=1+\mathrm{Re}[re^{i\theta}f''(re^{i\theta})/f'(re^{i\theta})]>0.\end{aligned}$$

经积分知其总增量为2π．因此从几何上考虑即知对每个$r<1$，$f(z)$把$|z|=r$一一映照成凸曲线$C(r)$．这就推出$f(D)$凸，因而$f(z)$在D内凸．

推论 2.4 函数$f(z)$在D内凸当且仅当$zf'(z)$在D内星形．

由于$z\frac{d}{dz}[zf'(z)]/[zf'(z)]=1+zf''(z)/f'(z)$，这乃是定理 2.5 和 2.7 的直接推论．

现在来导出系数的精确估计(Löwner 1917，Privalov 1924)．

定理 2.8 若$f(z)=z+a_2z^2+\cdots$在D内星形，则

$$|a_n| \leqslant n \quad (n=2,3,\cdots).$$

若 $f(z)$ 是星形奇函数或凸函数，则

$$|a_n| \leqslant 1 \quad (n=2,3,\cdots).$$

分别当且仅当

(10)
$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\beta}z)^2},\ f(z)=\frac{z}{1-e^{2i\beta}z^2},$$
$$f(z)=\frac{z}{1-e^{i\beta}z} \qquad (\beta \in \mathbf{R})$$

时，等号成立。

于是，由推论 2.2 又可得出：若 $f(z)\prec g(z)$ 且 $g(z)=z+\cdots$ 在 D 内星形，则 $|a_n|\leqslant n$；这是因为奇函数 $\sqrt{g(z^2)}$ 仍为星形函数（Rogosinski 1943）。

证　若 $f(z)$ 星形，则由定理 2.5 知

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n\in\mathscr{P}.$$

比较等式 $zf'(z)=f(z)p(z)$ 两端展开式系数，即得递推公式

$$a_n=\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}c_{n-\nu}a_\nu \quad (n=2,3,\cdots),$$

于是从推论 2.3 得到

(11)
$$|a_n|\leqslant\frac{2}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n-1}|a_\nu| \quad (n=2,3,\cdots).$$

因 $a_1=1$，用归纳法便推出 $|a_n|\leqslant n$；如 $f(z)$ 是奇函数则推出 $|a_n|\leqslant 1$，并且是严格的不等式，除非分别有 $|a_2|=2$ 或 $|a_3|=1$，而此时根据定理 1.5(1.2 节) $f(z)$ 必具有(10)的形式。凸的情形可按推论 2.4 化为星形的情形证明之。

3. 现在转向讨论"外部"的情形。设

(12)
$$g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots(|z|>1).$$

如果 $g(z)$ 在 Δ 内单叶并且像域的紧致余集 E 关于 0 星形，则称 $g(z)$ 在 $\Delta=\{|z|>1\}$ 内星形。如果 E 是凸集，则称 $g(z)$ 在 Δ 内凸。例如 $g(z)=z+z^{-1}$ 是凸函数，并且是许多问

题的极值函数.

定理 2.9 函数 $g(z)$ 在Δ内星形当且仅当

$$\text{(13)}\qquad \mathrm{Re}\, z\frac{g'(z)}{g(z)}>0 \quad (|z|>1).$$

$g(z)$ 凸当且仅当

$$\text{(14)}\qquad \mathrm{Re}\left[1+z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right]>0 \quad (|z|>1).$$

而若 $g(z)$ 凸，则

$$\text{(15)}\quad \mathrm{Re}\left[\frac{2zg'(z)}{g(z)-g(\zeta)}-\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]\geqslant 0 \quad (|z|>1,|\zeta|>1).$$

并非每个凸函数都是星形的，因为可能有 $0\in E$。由(13)与(14)式，当 h 为凸函数时，函数 $g(z)=zh'(z)$ 必是星形函数. 但其逆不真，因为我们只是得到了在(12)式中有 $b_0=0$ 的那些星形函数.

函数 $g(z)$ 在 $|z|>1$ 内星形当且仅当 $1/g(\zeta^{-1})$ 在$|\zeta|<1$ 内星形. 从几何上考虑这是显然的. 因此定理的第一个结论等价于定理 2.5. 凸的情形证明较难些，因 $g(z)$ 在 $|z|>1$ 内凸时 $1/g(\zeta^{-1})$ 不必在$|\zeta|<1$ 内凸，反过来也如此.

证 设 $g(z)$ 在Δ内凸. 若E是直线段，则(14)与(15)式可直接验证(参看 1.1 节例 1.2)，因此可假定 E 不是线段，而是由一条凸曲线 C 界成的集. 设单叶函数 $h(s)$ 把 $|s|<1$ 映照成C的内区域，由定理 2.7 证明中的(a)，曲线

$$C_k=\left\{h(s):|s|=1-\frac{1}{k}\right\} \quad (k=1,2,\cdots)$$

仍为凸曲线. 设 $g_k(z)$把Δ映照成 C_k 的外区域，使得 $g_k(\infty)=\infty$，$g_k'(\infty)>0$. 因曲线 C_k 收敛于 C，因而容易从卡氏核定理(1.4 节)推出：当 $k\to\infty$时，$g_k(z)$ 在$\{1<|z|<\infty\}$内局部一致地收敛于 $g(z)$.

仿照定理 2.7 证明中的(b)的作法，我们从 $|z|=|\zeta|=1$ 出发对 g_k 建立(15)式，再令 $k\to\infty$，即得到关于 g 的(15)式. 而

(14)式则是(15)式当 $\zeta=z$ 时的特例. 逆命题可以用与定理 2.7 的证明类似的方法推出.

(6) 式中的不等式,则被一个不同的不等式所代替 (Grötzsch 1935—36, Golusin 1938).

推论 2.5 若 $g(z)=z+\cdots$ 在Δ内是凸的,则

$$|g'(z)-1|\leqslant|z|^{-2}\quad(|z|>1). \tag{16}$$

证 从(15)式推出,对于每个 $z\in\Delta$,函数

$$\frac{2zg'(z)}{g(z)-g(\zeta)}+\frac{\zeta+z}{\zeta-z}=1-2z(g'(z)-1)\zeta^{-1}+\cdots$$

在 $|\zeta^{-1}|<1$ 内具有正实部. 故由推论 2.3 有 $|z(g'(z)-1)|\leqslant 1(|z|>1)$,并且因 $g'(z)-1=-b_1z^{-2}-\cdots$ 在∞有一个二重零点,(16)式可从薛瓦尔兹引理推出.

定理 2.10 若 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在Δ内星形,则

$$|b_n|\leqslant\frac{2}{n+1}\quad(n=1,2,\cdots). \tag{17}$$

克鲁涅 (Clunie 1959a) 的这一估计,如函数

$$g(z)=z(1+z^{-(n+1)})^{\frac{2}{n+1}}=z+\frac{2}{n+1}z^{-n}+\cdots \tag{18}$$

所表明,是最佳估计. 对于该函数,集 E 由 $n+1$ 条从 0 出发,长度为 $4^{\frac{1}{n+1}}$ 的等间隔线段组成. 可以证明 (Holland 1972),除去它们的旋转之外,这些函数是仅有的极值函数.

证 对

$$\begin{aligned}u(z)&=g'(z^{-1})=1-\sum_{\nu=1}^{\infty}(\nu-1)b_{\nu-1}z^{\nu}\\ v(z)&=zg(z^{-1})=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_{\nu-1}z^{\nu}\end{aligned}\qquad(|z|<1)$$

应用推论 2.1(2.1 节),即得到

$$(n+1)^2|b_n|^2\leqslant 4\left(1-\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu|b_\nu|^2\right)\leqslant 4\quad(n=1,2,\cdots). \tag{19}$$

注意 把这个定理同定理 2.8 相比较，我们发现Δ内星形函数有显著的不同：它的系数很小，且对每个 n 有不同的极值函数。S 与 Σ 的函数的系数性质也有相应的差别(见 5.2 节)。

从(19)式及面积定理(1.1 节)容易推出

$$
\text{(20)} \qquad \limsup_{n\to\infty} n|b_n| \leqslant 2\left(1-\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu|b_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{area}E\right)^{\frac{1}{2}}.
$$

我们断言：对于所有星形函数 $g\in\Sigma$，

$$
\text{(21)} \qquad \limsup_{n\to\infty} n|b_n| < 2.
$$

可以证明数值 2 是最好的 (Pommerenke 1963a)。从(20)式我们还可断定

$$
\text{(22)} \qquad \operatorname{area}E = 0 \Rightarrow nb_n \to 0 \ (n\to\infty).
$$

因此 $\limsup n|b_n|$ 的最大值问题无解，而具有 $\operatorname{area}E=0$ 的函数使该泛函取最小值。这与我们将在 7.3 节中见到的只涉及有限个系数的极值问题形成鲜明的对比。

下面我们提一下一个进一步的结果，它为玻利亚和绍恩伯格所猜测 (Pólya and Schoenberg 1958)，最近由茹谢威赫和谢尔-斯毛尔所证明 (Ruscheweyh and Sheil-Small 1973)：若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 内凸，则其[哈达玛 (Hadamard)] 卷积

$$
f*g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n \quad (|z|<1)
$$

也是凸函数。

从关于星形函数与凸函数的大量文献中，我们再列举一些新近的更进一步的文章： Brannan and Kirwan 1969, Clunie and Keogh 1960, Hummel 1957, 1972b, London and Thomas 1970, Pommerenke 1962a, 1963a, b, Sheil-Small 1969, 1970, Twomey 1970, 1971。

问 题

1. 试证明[1)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \cos n\theta \prec \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

当且仅当右端的函数凸 (Robertson 1936b).

2. 试证明 $\log(1+z)$ 在 D 内凸，并推证出

$$\mathrm{Re}\, w_1 > \frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\, w_2 > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}\sqrt{w_1 w_2} > \frac{1}{2}.$$

3. 设 $g(z)$ 在 D 内凸。试证明 (Golusin 1935)

$$f(z)\prec g(z) \Rightarrow \int_0^z \zeta^{-1} f(\zeta)\,d\zeta \prec \int_0^z \zeta^{-1} g(\zeta)\,d\zeta.$$

4. 设 $f(z)=z+\cdots$ 在 D 内星形，试分别从(a)定理 2.5; (b)定理 2.6; (c) (6) 式推出

$$z^{-1}f(z) \prec (1-z)^{-2}$$

(Marx 1932/33, Strohhäcker 1933).

5. 设 $f(z)\prec g(z)$ 且 $g(z)$ 是凸的。试证

$$|a_n| \leqslant |b_1| \quad (n=1,2,\cdots)$$

(Rogosinski 1943).

6. 设 $f(z)$ 在 D 内星形。试证明 $\arg f(re^{it})\to 2\pi\gamma(t)$ $(r\to 1-0)$，其中 $\gamma(t)$ 是(3)式中的增函数，但带有一个适当选取的加数常量。

7. 试证明 $2-\sqrt{3}$ 是 S 类的"凸性半径"，即对所有的 $f\in S$ 使 $f(\rho z)$ 在 D 内凸的数 ρ 之最大值。

8. 设 $f(z)=a_1 z+\cdots$ 在 D 内星形。试证明

$$(n+1)^2|a_n|^2\leqslant 4\sum_{\nu=1}^{n} \nu|a_\nu|^2 \quad (n=1,2,\cdots),$$

并证明：若 $\mathrm{area}\, f(D)\leqslant\pi$ 则 $|a_n|\leqslant\dfrac{2}{n+1}$ (Clunie-Keogh 1960).

9. 设 $g(z)$ 在 Δ 内凸。试证明估计式

---

1) 需补充假定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 单叶，否则可举出反例：$z^2\cos 2\theta \prec z^2$. ——译者注

$$|b_n| \leqslant \frac{2}{n(n+1)} \quad (n=1,2,\cdots)$$

成立，并确定出所有的极值函数（Clunie 1959a）。

10. 设 $g(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots \in \Sigma$ 且满足

$$|\arg[zg'(z)/g(z)]| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha \quad (|z|>1, 0<\alpha\leqslant 1).$$

试由等式

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)}\left(\frac{1+cz^{n+1}}{1-cz^{n+1}}\right)^{1-\alpha}, \quad |c|=1, n=1,2,\cdots$$

确定一个星形函数 $h \in \Sigma$ 以证明 $|b_n| \leqslant 2\alpha/(n+1)$（Brannan, Clunie and Kirwan 1970）。

11. 设 $g \in \Sigma$ 凸，试利用推论 2.5 及从属关系证明 ∂E 的长度$\leqslant 8$（Pólya and Schiffer 1959）。

2.3 近于凸函数

1. 函数 $f(z) = a_1 z + \cdots (|z|<1)$ 称为**近于凸**，如果存在星形函数 $g(z) = b_1 z + \cdots$ 使得

(1) $$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{g(z)} > 0 \quad (|z|<1).$$

近于凸函数是由卡普兰(Kaplan 1952)引入的；选择这一名称，是因为由推论 2.4，不等式(1)等价于

(2) $$\operatorname{Re}\frac{f'(z)}{h'(z)} > 0 \text{ 或 } \left|\arg\frac{f'(z)}{h'(z)}\right| < \frac{\pi}{2},$$

其中 $h(z)$ 是凸函数. 这一定义虽然似乎不太自然，但将会看到许多使人感兴趣的单叶函数都是近于凸的. 由(1)式及定理 2.5，显然每个星形函数是近于凸的.

定理 2.11 **每个近于凸函数必单叶.**

证 利用(2)式的定义方式. 反函数 $h^{-1}(w)$ 在凸区域 $H = h(D)$ 内解析，且 $\varphi(w) = f(h^{-1}(w))$ 满足

$$\operatorname{Re}\varphi'(w) = \operatorname{Re}\frac{f'(z)}{h'(z)} > 0 \quad (w = h(z) \in H).$$

因此对于 $w_1, w_2 \in H$,

$$\mathrm{Re}\,\frac{\varphi(w_2)-\varphi(w_1)}{w_2-w_1}=\int_0^1 \mathrm{Re}\varphi'(w_1+t(w_2-w_1))dt>0,$$

故 $\varphi(w)$ 在 H 内单叶，从而 $f(z)=\varphi(h(z))$ 在 D 内单叶.

列文多夫斯基给出近于凸函数的一个几何特征 (Lewandowski 1958, 1960). 早先，比尔那契也曾以这一几何形式研究过近于凸函数 (Biernacki 1936); 当时，他所用的名称是"直线可达"(见图 2.1).

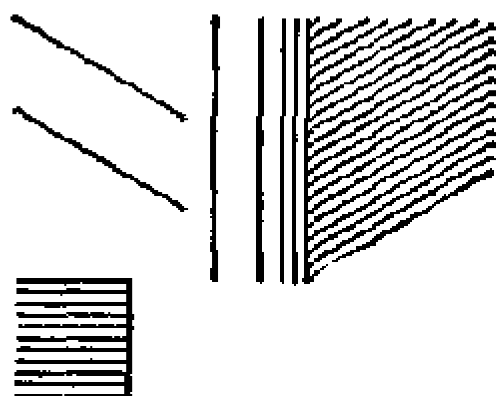


图 2.1

定理 2.12 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在 D 内解析单叶. 则 $f(z)$ 近于凸当且仅当 $\mathbf{C}\backslash f(D)$ 是一些闭半直线的并，这些闭半直线的相应的开半直线互不相交.

我们将不会用到这一定理，因而只是简单陈述一下定理的证明方法. 首先设 $f(D)$ 满足这一几何条件. 于是就可用有限条这种半直线的余集来逼近 $f(D)$, 并证明对这种特殊情况 (1) 式成立. 由卡氏核定理即推出在一般情况下 (1) 式成立. 如果像区域具有更进一步的条件，甚至也可以通过这样的步骤找出相应的星形函数 $g(z)$.

反之，设(1)式成立. 我们定义

$$f(z,t)=f(z)+tg(z)\quad (z\in D, 0\leqslant t<\infty).$$

(Bielecki and Lewandowski). 因为 $g(z)$ 星形，由(1)式而有

$$\operatorname{Re}\left[z\frac{\partial}{\partial z}f(z,t)\Big/\frac{\partial}{\partial t}f(z,t)\right]$$
$$=\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}+t\operatorname{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}>0,$$
故可经标准化使 $f(z,t)$ 成为一个娄威纳链(参看 6.1 节,特别是定理 6.2)。从而推出 $f(z,t)$ 在 D 内单叶,并且

(3) $f(z)\prec f(z)+tg(z)\prec f(z)+t'g(z)\quad(0<t<t'<\infty)$.

不妨再假定 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 $\bar{D}$ 连续;一般情况可以通过一个极限过程推出。考虑闭半直线

(4) $L(\theta)=\{f(e^{i\theta})+tg(e^{i\theta}):0\leqslant t<\infty\}\quad(0\leqslant\theta<2\pi)$.

从(3)式推知区域 $f(D)$ 与 $\partial f(D,t)(0\leqslant t<\infty)$ 不相交。由于 $L(\theta)$ 被包含于这些边界 $\partial f(D,t)$ 之中,因此我们断定 $L(\theta)\subset\mathbb{C}\backslash f(D)$.

假设半直线 $L(\theta_1)$ 与 $L(\theta_2)(\theta_1\neq\theta_2)$ 相交叉,即交于一点且该点不是任何一条半直线的端点。则由连续性,必存在不同的两点 $z_1,z_2,|z_1|=|z_2|=r<1$ 以及 $t_1,t_2>0$,使得

$$f(z_1,t_1)=f(z_1)+t_1g(z_1)=f(z_2)+t_2g(z_2)=f(z_2,t_2).$$

因 $f(z,t_1)$ 在 $z\in D$ 内单叶故必有 $t_1\neq t_2$,比如说 $t_1<t_2$。但这是不可能的,因为由(3)式,两曲线 $\{f(z,t_j):|z|=r\}(j=1,2)$ 不相交。于是我们已经从 $\partial f(D)$ 的每一点出发作了一条半直线包含于 $\mathbb{C}\backslash f(D)$,并且这些半直线不相交叉。最后,$\mathbb{C}\backslash f(D)$ 的剩下部分为半直线所充满。

现在证明,比伯巴赫猜想对近于凸函数成立 (Reade 1955).

定理 2.13 若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 在 D 内近于凸,则
$$|a_n|\leqslant n\quad(n=2,3,\cdots).$$

证 设 $g(z)=b_1z+\cdots$ 是满足(1)式的星形函数(这里要强调一下,我们虽然已作了标准化 $a_1=1$,但不能设 $b_1=1$),假定 $zf'(z)/g(z)=c_0+c_1z+\cdots$,就有

(5)
$$na_n=c_0b_n+\sum_{\nu=1}^{n-1}c_{n-\nu}b_\nu\quad(n=2,3,\cdots).$$

因 $\mathrm{Re}[zf'(z)/g(z)] > 0$，故容易从推论 2.3(2.1 节)推出 $|c_\nu| \leqslant 2\mathrm{Re}\,c_0 \leqslant 2|c_0|$，$\nu \geqslant 1$. 再由定理 2.8 得到 $|b_\nu| \leqslant \nu|b_1|$. 又因 $c_0 b_1 = 1$，于是从(5)式推出

$$n|a_n| \leqslant n + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \nu = n^2.$$

作为例子我们考虑近于凸函数的一个子类. 选取 $g(z) = z/(1-z^2)$ 时，便得到几何解释特别简单的一类函数. 这时，定义(1)变成

$$\mathrm{Re}[(1-z^2)f'(z)] > 0 \quad (|z| < 1). \tag{6}$$

今限于考虑具有实系数的函数，即限于考虑像域关于 **R** 对称的情形. 于是可以证明（例如参看 de Bruijn 1941, Grunsky 1971）：单叶函数 $f(z)$ 满足条件(6)当且仅当 $f(D)$ 同平行于虚轴的每条直线或者根本不相交或者相交于一个区间. 这样的函数因而被称为在虚轴方向凸（Robertson 1936b）. 例如，函数 $z/(1-z^2)$ 属于此类.

2. 设 $f(z)$ 在 D 内解析(不一定单叶)，如果

$$\mathrm{Im} f(z) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im} z = 0, \tag{7}$$

则称 $f(z)$ 为典型实照函数（Rogosinski 1932）. 由定义推知 $f(z)$ 的所有系数都是实数. 反之，每个具有实系数的单叶函数都是典型实照函数，这是因为 $\mathrm{Im} f(z) = 0$ 蕴含 $f(z) = \overline{f(z)} = f(\bar{z})$，从而 $z = \bar{z}$，即 $\mathrm{Im} z = 0$.

定理 2.14 设 $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots (|z| < 1)$ 具有实系数. 则下列三条件等价：

(i) $f(z)$ 为典型实照函数；

(ii) 函数

$$(1-z^2)\frac{f(z)}{z} = 1 + a_2 z + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}) z^n$$

在 D 内具有正实部；

(iii) 存在增函数 $\gamma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ 使得

$$f(z)=\int_0^{\pi}\frac{z}{1-2z\cos t+z^2}\,d\gamma(t),\gamma(\pi)-\gamma(0)=1.$$

证 设 $f(z)$ 为典型实照函数. 因 $f'(0)=1>0$, 故从(7)式推出当 $\operatorname{Im}z\geqslant 0$ 有 $\operatorname{Im}f(z)\geqslant 0$. 因此, 当 $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 时有

$$\text{(8)}\qquad \operatorname{Re}\left[(r^2-z^2)\frac{f(z)}{z}\right]=2r\sin\theta\cdot\operatorname{Im}f(re^{i\theta})\geqslant 0,$$

对 $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 此式亦成立. 于是由最大值原理知 (8) 式对 $|z|<r$ 也成立. 令 $r\to 1-0$ 便推出(ii).

其次, 若(ii)成立, 则可应用赫格罗兹 (Herglotz) 表示式(2.1节定理 2.4). 由 $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 容易导出(iii). 最后, (iii) 直接蕴含: 对于 $\operatorname{Im}z>0$ 有 $\operatorname{Im}f(z)>0$. 因此推出(i).

从(6)式与定理 2.14 我们断言: 具有实系数的函数 $f(z)=z+\cdots$ 在虚轴方向凸当且仅当 $zf'(z)$ 为典型实照函数. 这可与 2.2 节的推论 2.4 相类比.

例 2.3 由定理 2.14(ii), 知函数

$$f(z)=\frac{(1+z^2)z}{(1-z^2)^2}=z+3z^3+5z^5+\cdots$$

为典型实照函数. 但该函数在 D 内并非单叶, 因为它不满足 $|a_3-a_2^2|\leqslant 1$(参看 1.2 节定理 1.5).

推论 2.6 若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 为典型实照, 则

$$\text{(9)}\qquad |a_{n+1}-a_{n-1}|\leqslant 2,\ |a_n|\leqslant n\quad(n=2,3,\cdots).$$

属于第厄多涅 (Dieudonné 1931b) 与罗各辛斯基 (Rogosinski 1932) 的这一结果可以从 (ii) 及推论 2.3(2.1 节)推出. 估计式 $|a_n|\leqslant n$ 则可以从 $a_1=1$, $|a_2|\leqslant 2$ 出发用归纳法证明. 寇勃函数表明, (9)式中的每个不等式都是最佳的.

关于近于凸函数的大量文献, 我们只介绍其中的一部分: Brannan, Clunie and Kirwan 1973, Clunie and Pommerenke 1966, Krzyz 1962, 1963, Pommerenke 1965a, Robertson 1936b, 1965, 1966, Ruscheweyh and Sheil-Small 1973, Thomas 1967.

此外，巴西列维奇还引入了近于凸函数的一种推广（Bazilevič 1955）；见6.3节问题2以及例如 Thomas 1968 和 Zamorski 1962。

问　　题

1. 设 $f(z)$ 满足(2)式，其中 $h(z)$ 在 D 内凸．试证明

$$\operatorname{Re}\frac{f(z_2)-f(z_1)}{h(z_2)-h(z_1)}>0 \quad (z_1\in D, z_2\in D).$$

2. 设 $f(z)$ 在 D 内近于凸．试证明

$$\arg\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}<2\pi \quad (z_1\in D, z_2\in D),$$

其中 2π 不能代之以更小的常数（Bieroacki 1936）。

3. 设 $\{a_k\}\geqslant 0$ 递减。试证明 $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ 在 D 内近于凸（Brannan 1970）。

4. 试证明：对于每个近于凸奇函数 $f(z)=z+a_3z^3+\cdots$ 有 $|a_n|\leqslant 1$ $(n=1,3,\cdots)$。

5. 试证明：若 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 在虚轴方向凸，则 $|a_n|\leqslant 1$ $(n=2,3,\cdots)$；若再设 $|\operatorname{Re}f(z)|$ 有界，则 $a_n=O(n^{-1})(n\to\infty)$（Robertson 1936b）。

6. 试证明典型实黑函数 $f(z)=z+\cdots$ 满足

$$|f(z)|\leqslant |z|/(1-|z|)^2 \quad (|z|<1)$$

（Rogosinski 1932）。

7. 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 拟从属于典型实照函数 $g(z)=z+\cdots$．试利用表示式(Ⅲ)中的核是星形函数这一事实证明 $|a_n|\leqslant n$ $(n=1,2,\cdots)$（Robertson 1970b）。

第三章 格隆斯基不等式

1939 年格隆斯基发现了单叶性的一个必要充分条件： 函数

$$\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\zeta^{-l}$$

在 $\{|z|>1,|\zeta|>1\}$ 内解析当且仅当 $g\in\Sigma$. 就这一点而言，我们着手于研究 Σ 类而不是 S 类是自然的. 格隆斯基不等式表述为

$$(*)\qquad \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k},\ (\lambda_k\in\mathbf{C}).$$

其证明并不困难. 格隆斯基不等式连同它的推广，已成为研究单叶函数理论最强有力的工具之一.

困难在于用 $g(z)$ 的系数 b_k 表示格隆斯基系数 $b_{kl}(k,l=1,2,\cdots)$的表达式十分复杂.这就是为什么直到 1960 年才出现第一个重要应用(由查尔绳斯基和谢非尔给出)的缘由. 在利用不等式(∗)研究 S 类函数的"泛系数"[1]方面,已经发现了几种巧妙的方法，特别是米林于 1965 年和费茨盖拉德于 1972 年所建立的方法. 至于如(∗)所表明的格隆斯基不等式与复对称矩阵的密切联系，我们将作为附录予以讨论. 关于这一课题的进一步结果，可以在米林的书中找到,该书还讨论了推广到多连通区域的情形.

3.1 格隆斯基不等式

1.为今后讨论方便，我们首先引入法贝尔（Faber）多项式. 设函数

$$(1)\qquad g(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}$$

1) 意为"一般项系数";"系数总体",原文，*Large coefficients*.——译者注

在∞的某邻域内解析，因此它在∞邻近，比如说在 $|z|>R$ 内单叶。根据(1)式，对于固定的 $w\in\mathbf{C}$，函数 $\log[\zeta^{-1}(g(\zeta)-w)]$ 对充分大的 ζ 解析且在∞为零。故在∞邻近的展开式可表为

$$\log\frac{g(\zeta)-w}{\zeta}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Phi_n(w)\zeta^{-n}, \tag{2}$$

$$(w\in\mathbf{C},\ |\zeta|\text{充分大.})$$

关于 ζ 微分(2)式，并置 $\Phi_0(w)=1$，得

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)-w}=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(w)\zeta^{-n-1}; \tag{3}$$

关于 w 微分(2)式又得

$$\frac{1}{g(\zeta)-w}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Phi_n'(w)\zeta^{-n}. \tag{4}$$

将展开式(1)代入(3)式，可以得出等式

$$\zeta-\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\zeta^{-n}$$

$$=\left(\zeta+(b_0-w)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^{-n}\right)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(w)\zeta^{-n}\right).$$

比较系数，即得 $\Phi_1(w)=w-b_0$ 及递推公式

$$\Phi_{n+1}(w)=(w-b_0)\Phi_n(w)-\sum_{\nu=1}^{n-1}b_{n-\nu}\Phi_\nu(w)-(n+1)b_n, \tag{5}$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

于是可由归纳法推出 $\Phi_n(w)$ 是形如

$$\Phi_n(w)=(w-b_0)^n-nb_1(w-b_0)^{n-2}+\cdots, \tag{6}$$

$$(n=2,3,\cdots)$$

的 n 次多项式。我们称 $\Phi_n(w)$ 为 $g(z)$ 的 n 次**法贝尔多项式**。特别，我们求得

$$\Phi_0(w)=1,\Phi_1(w)=w-b_0,\ \Phi_2(w)=(w-b_0)^2-2b_1,$$

$$\Phi_3(w)=(w-b_0)^3-3b_1(w-b_0)-3b_2, \tag{7}$$

$$\Phi_4(w)=(w-b_0)^4-4b_1(w-b_0)^2-4b_2(w-b_0)$$

$$+(2b_1^2-4b_3).$$

法贝尔多项式在复逼近理论中起着重要作用。可以证明，在适当的条件下，若当区域 J 的内区域中的解析函数可以展为 J 的外区域的映照函数的法贝尔多项式的级数。可参看斯米尔诺夫和列别杰夫的书 (Smirnov and Lebedev) 以及诸如 Suetin 1964, Curtiss 1971, Kövari 1972.

现在引入格隆斯基系数。因为在 $\{|z|>R, |\zeta|>R\}$ 内，当 $z\neq\zeta$ 时，$g(z)\neq g(\zeta)$ 且 $g'(z)\neq 0$，从而函数 $\log\dfrac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}$ 在这一区域内解析，故可表为

$$\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\zeta^{-l}, \tag{8}$$

$$(|z|>R, |\zeta|>R).$$

展式前添加负号将会有方便之处。我们称 b_{kl} 为函数 $g(z)$ 的**格隆斯基系数**。显然有

$$b_{kl}=b_{lk}, \quad (k,l=1,2,\cdots). \tag{9}$$

将 $w=g(z)$ 代入(2)式，可得

$$\log\frac{g(\zeta)-g(z)}{\zeta-z}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}[\Phi_k(g(z))-z^k]\zeta^{-k}, \tag{10}$$

再与(8)式比较便得到

$$\Phi_k(g(z))=z^k+k\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-l}, \quad (|z|>R). \tag{11}$$

因 $\Phi_1(w)=w-b_0$，故有

$$b_{k1}=b_{1k}=b_k, \quad (k=1,2,\cdots). \tag{12}$$

从(8)式还可看出格隆斯基系数与 b_0 无关。关于格隆斯基系数的明确而复杂的表示式已由苏尔和哼梅尔给出 (Schur 1947, Hummel 1964)。从(7)式和(11)式，我们算出

$$b_{22}=b_3+\frac{1}{2}b_1^2, \quad b_{23}=b_4+b_1b_2, \tag{13}$$

$$b_{24}=b_5+b_1b_3+\frac{1}{2}b_2^2,\ b_{33}=b_5+b_1b_3+b_2^2+\frac{1}{3}b_1^3,$$

$$b_{34}=b_6+b_1b_4+2b_2b_3+b_1^2b_2,$$

$$b_{44}=b_7+b_1b_5+2b_2b_4+2b_1b_2^2+b_1^2b_3+\frac{3}{2}b_2^2+\frac{1}{4}b_1^4.$$

例 3.1 设 $g(z)=z+az^{-1}$，则由(8)式有

$$\log\left(1-\frac{a}{\zeta z}\right)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\zeta^{-l},$$

于是 $b_{kk}=\frac{1}{k}a^k$，$b_{kl}=0\quad(k\neq l)$.

2. 从现在起我们使用 1.1 节及前段引进的记号。并特别以 b_{kl} 记 $g\in\Sigma$ 的格隆斯基系数，记 $E=\mathbb{C}\setminus g(\Delta)$，$\Delta=\{|z|>1\}$.

这一章的基本结果是把面积定理推广为如下形式 (Schiffer 1948, Milin 1964; Jenkins 1964; Pommerenke 1964a):

定理 3.1 设 $g\in\Sigma$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是一组不全为零的复数，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\sum_{l=1}^{m}b_{kl}\lambda_l\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}|\lambda_k|^2. \tag{14}$$

等号成立当且仅当 $\operatorname{area}E=0$.

取 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}=0,\lambda_m=1$，作为(14)式的推论我们得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}k|b_{km}|^2\leqslant\frac{1}{m},\ (m=1,2,\cdots). \tag{15}$$

面积定理(更确切地说是其推论(1.2.5)是(15)式当 $m=1$ 时的特例．而且(15)式还蕴含

$$|b_{kl}|\leqslant\frac{1}{\sqrt{kl}}\leqslant 1,\ (k,l=1,2,\cdots). \tag{16}$$

反过来，(14)式显然蕴含着单叶性．因若对于某个 $R\geqslant 1$，函数 $g(z)=z+b_0+\cdots$ 在 $R<|z|<\infty$ 内解析，且(14)式对一切 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 以及 $m=1,2,\cdots$ 成立，则(16)式成立，于是二重级数(8)对 $|z|>1$，$|\zeta|>1$ 收敛．因此函数 $(g(z)-g(\zeta))/$

$(z-\zeta)$ 必定解析且不等于零，这就推出 $g(z)$ 单叶，因而属于 Σ.

证 考虑多项式

(17) $$h(w)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\Phi_k(w)\neq 0.$$

从(11)式和(9)式，我们推出

(18) $$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}z^k+\sum_{k=1}^{\infty}d_k z^{-k},\ d_k=\sum_{l=1}^{m}b_{kl}\lambda_l.$$

而由推论 1.5(1.5 节)，有

(19) $$\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2 d\Omega=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r)}\overline{h(w)}\,h'(w)dw,$$

$$(1<r<\infty),$$

其中 $H(r)=\mathbf{C}\setminus\{g(z):|z|\geqslant r\}$, $C(r):g(re^{i\theta}),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 作代换 $w=g(z)$, $z=re^{i\theta}$, 并应用(18)式，上式右端成为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\varphi(z)}\,\varphi'(z)z\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar\lambda_k}{k}\bar z^k+\sum_{k=1}^{\infty}\bar d_k\bar z^{-k}\right)$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k z^k-\sum_{k=1}^{\infty}kd_k z^{-k}\right)d\theta.$$

交换积分与求和顺序，则从(19)式得出

$$\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2 d\Omega$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}r^{2k}-\sum_{k=1}^{\infty}k|d_k|^2 r^{-2k}\quad(r>1).$$

令 $r\to 1+0$，因 $h'(w)$ 在 $\mathbf{C}$ 内连续，且 E 是单调区域族 $H(r)$ $(r>1)$ 的交，而得到

(20) $$\frac{1}{\pi}\iint_E|h'(w)|^2 d\Omega=\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}k|d_k|^2.$$

因积分非负，并注意(18)式中 d_k 的定义，即知上式蕴含(14)式. 等

号成立当且仅当(20)式左端积分等于零；而当且仅当 $\operatorname{area}E=0$ 时，积分为零，因为 $h'(w)$ 只有有限个零点.

现在推导格隆斯基不等式：

定理 3.2 若 $g\in\Sigma,\lambda_k\in\mathbb{C}(k=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_l\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}|\lambda_k|^2,\tag{21}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}|\lambda_k|^2,\tag{22}$$

只要末尾的级数是收敛的.

不等式(22)是格隆斯基 1939 年的原始结果，在下面的证明中表明它是(21)式的直接推论. 反之，从引理3.7(3.6节)又推知(22)式蕴含(21)式. 请注意，我们只证明二重级数(22)收敛而不是绝对收敛. 9.4 节中，在关于 $\partial g(\Delta)$ 的附加条件下我们再建立格隆斯基不等式的一种更精确的形式.

证　由薛瓦尔兹不等式及(15)式，知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}|b_{kl}\lambda_l|\leqslant\left(\sum_{l=1}^{\infty}l|b_{kl}|^2\sum_{l=1}^{\infty}l^{-1}|\lambda_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{m}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}l^{-1}|\lambda_l|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

是收敛的，故由(14)式按常规论证即得出(21)式. 从(21)式我们推出当 $1\leqslant p\leqslant m,\ 1\leqslant q\leqslant n$ 时有

$$\left|\sum_{k=p}^{m}\sum_{l=q}^{n}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right|^2\leqslant\sum_{k=p}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\sum_{k=p}^{m}k\left|\sum_{l=q}^{n}b_{kl}\lambda_l\right|^2\tag{23}$$

$$\leqslant\sum_{k=p}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\sum_{l=q}^{n}\frac{|\lambda_l|^2}{l}.$$

因此，(22)式中的二重级数收敛. 置 $p=q=1$，令 $m\to\infty$，$n\to\infty$ 即得(22)式.

就 $k>m$ 时 $\lambda_k=0$ 的"有限"形式，我们简略讨论一下(22)式中等号成立的条件.

由 $\arg\lambda_k$ 的任意性，不等式(22)等价于

$$(24)\quad \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_k\lambda_l+\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\geqslant 0\quad(\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{C}).$$

给定 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 一组值，假定(24)式中等号成立。由熟知的薛瓦尔兹不等式等号成立的条件，从(23)式(取 $p=q=1, m=n$)得到

$$(25)\qquad k\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_l=\begin{cases}-\bar{\lambda}_k & 对\ 1\leqslant k\leqslant m,\\ 0 & 对\ k>m;\end{cases}$$

比例常数之所以必须是 -1，是为了使(24)式中等号成立。于是从(18)式得出

$$h(g(z))=\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}z^k-\sum_{k=1}^{m}\frac{\bar{\lambda}_k}{k}z^{-k},$$

因此对 $|z|=1$ 有 $\operatorname{Re} h(g(z))=0$。从而知 $g(\Delta)$ 系由 $\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}h(w)=0\}$ 的若干弧段界成。

上述讨论尚未表明(24)式是最佳的，因为我们还不知道是否存在函数 $g\in\Sigma$ 满足(25)式。这一点将在7.4节中得到证实。

关于"无限"形式之(21)式等号成立的条件，目前似乎还所知不多。

格隆斯基不等式方法常常不能给出关于极值函数的确切信息，特别是不能确定所得估计是否精确。这是它的一个缺陷。

3. 格隆斯基不等式的某些形式可以用泛函分析的术语来表述。考虑序列 $z=(z_k)$ 的复希尔伯特(Hilbert)空间，其内积与范数为

$$\langle z,w\rangle=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\bar{w}_k,\quad \|z\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

我们引入联系于函数 g 的**格隆斯基算子**

$$(26)\qquad B:(z_k)\longmapsto\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{kl}\, b_{kl}z_l\right);$$

其伴随算子为

$$(27)\qquad B^*:(z_k)\longmapsto\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{kl}\,\overline{b_{kl}}z_l\right),$$

于是对称关系(9)可表为 $\overline{Bz}=B^*\bar{z}$. 关于函数 $g\in\Sigma$ 的格隆斯基不等式(21),(22)则变成

$$(28)\qquad \|Bz\|\leqslant\|z\|,\ |\langle z, Bz\rangle|\leqslant\|z\|^2.$$

利用对称关系容易证明(由引理 3.7 或直接证明)(28)的两个不等式等价. 因此,若 $g\in\Sigma$, 其格隆斯基算子 B 是范数 $\|B\|\leqslant 1$ 的有界算子. 在 9.4 节,我们将再来讨论这一问题,在那里,我们将从几何上给出关于 $\|B\|<1$ 的一个充分必要条件.

有界算子 B 如果满足 $BB^*=B^*B=I$(I 为恒等算子),就称为酉算子. 由(26)及(27)式知,格隆斯基算子 B 为酉算子当且仅当

$$(29)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}kb_{kj}\overline{b_{kl}}=\begin{cases}0, & \text{当 } j\neq l,\\ \dfrac{1}{l}, & \text{当 } j=l.\end{cases}$$

关于这一点还有一个简单的特征性质(Milin 1964; Pommerenke 1964a; Pederson 1968b):

推论 3.1 格隆斯基算子是酉算子当且仅当 $\operatorname{area}E=0$.

证 首先设 $\operatorname{area}E=0$. 这时(14)式等号成立,且当 $j\neq l$ 时可推出

$$(30)\qquad |\lambda_j|^2\sum_{k=1}^{\infty}k|b_{kj}|^2+2\operatorname{Re}\left[\lambda_j\bar{\lambda}_l\sum_{k=1}^{\infty}b_{kj}\bar{b}_{kl}\right]+|\lambda_l|^2\sum_{k=1}^{\infty}k|b_{kl}|^2=\frac{|\lambda_j|^2}{j}+\frac{|\lambda_l|^2}{l}.$$

若置 $\lambda_j=0$, $\lambda_l=1$, 便得到 $j=l$ 情形下的(29)式;把这一结果代入(30)式便得 $\operatorname{Re}[\cdots]=0$. 由于 λ_j 与 λ_l 的任意性这也就给出了 $j\neq l$ 情形下的(29)式. 反之,若(29)式成立,则(30)式亦成立,故由定理 3.1 得出 $\operatorname{area}E=0$.

对于 $k>m$ 时 $\lambda_k=0$ 的格隆斯基不等式的重要特例我们可

以用线性代数的术语表达。m阶格隆斯基矩阵

$$B=(\sqrt{kl}\,b_{kl}),\ k,l=1,\cdots,m, \tag{31}$$

是对称矩阵，如果先应用引理 3.6（见 3.6 节），然后应用定理 3.1，则容易得到：

推论 3.2 若 $g\in\Sigma$，则 m 阶格隆斯基矩阵 $(m=1,2,\cdots)$ 可表为

$$B=U'\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix}U, \tag{32}$$

其中 U 是酉矩阵，$|d_k|\leqslant 1,(k=1,\cdots,m)$。

格隆斯基不等式在应用上的许多困难同如下的事实有关：格隆斯基系数 $b_{kl}(k,l=1,2,\cdots)$ 是已为 $b_{kl}=b_k\ (k=1,2,\cdots)$ 以很复杂的形式确定了的，如何用泛函分析或代数的公式把它表示出来还不清楚。

问　　题

1. 试证

$$[g^{-1}(w)]^n=\Phi_n(w)+O\left(\frac{1}{w}\right),\ w\to\infty.$$

2. 设 $g(z)=z+\cdots$ 在 D 内凸，试根据推论 2.5 推出：

$$|\Phi_n(g(z))-z^n|<1,\ (|z|>1),$$

因而对 $w\in E$ 有 $|\Phi_n(w)|\leqslant 2$.

3. 证明递推公式：

$$(k+1)b_{k+1,l}=b_{k+l}+kb_{k,l+1}+k\sum_{\nu=1}^{l-1}b_{l-\nu}b_{\nu k}-\sum_{\nu=1}^{k-1}\nu b_{k-\nu}b_{\nu l}.$$

4. 设 $g\in\Sigma$ 且 $b_1=\cdots=b_p=0$。试证明当 $k+l\leqslant 2p+3$ 时有 $b_{kl}=b_{k+l-1}$。并由此推出 $|b_{2k-1}|\leqslant\frac{1}{k}\ (k=1,\cdots,p+1)$ (Jenkins 1960b; Duren 1971)。

5. 试证：如果 $g\in\Sigma$，则

$$\operatorname{Re}\left[b_3+\frac{1}{2}b_1^2+\frac{1}{2}\right]\geqslant 0.$$

进而再证：对每一$t\in[-1,1]$，能够找到唯一的极值函数满足$b_1=it$，且不再存在其它的极值函数。

6.设$g\in\Sigma$且$\mu_k,\lambda_k\in\mathbf{C}\ (k=1,2,\cdots)$. 证明

$$\left|\sum_k\sum_l b_{kl}\mu_k\lambda_l\right|^2\leqslant\sum_k\frac{1}{k}|\mu_k|^2\sum_k\frac{1}{k}|\lambda_k|^2.$$

7.设B是关于函数$g\in\Sigma$的格隆斯基算子. 试证明若$\operatorname{area}E=0$则B非紧. 并进而证明若对某个$\rho<1$，函数$g(z)$在$|z|>\rho$单叶，则B是紧的且$\|B\|\leqslant\rho^2$.

3.2 戈鲁辛 (Golusin) 不等式

本节的主要结果是戈鲁辛不等式 (Golusin 1947, 1948; 参看 Golusin 113—126页).

定理 3.3 设$g\in\Sigma$, $z_\nu\in\Delta$, $\gamma_\nu\in\mathbf{C}(\nu=1,\cdots,n)$, $n=1,2,\cdots$. 则

$$(1)\qquad \left|\sum_{\mu=1}^n\sum_{\nu=1}^n\gamma_\mu\gamma_\nu\log\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\right|\leqslant\sum_{\mu=1}^n\sum_{\nu=1}^n\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu\log\frac{1}{1-z_\mu^{-1}\bar{z}_\nu^{-1}}.$$

证 我们来应用格隆斯基不等式，置

$$(2)\qquad \lambda_k=\sum_{\nu=1}^n\gamma_\nu z_\nu^{-k},\quad(k=1,2,\cdots).$$

约定$\mu,\nu=1,\cdots,n$, $k,l=1,2,\cdots$. 由(3.1.8)式得

$$(3)\qquad \sum_\mu\sum_\nu\gamma_\mu\gamma_\nu\log\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}=-\sum_k\sum_l\sum_\mu\sum_\nu b_{kl}\gamma_\mu\gamma_\nu z_\mu^{-k}z_\nu^{-l}=-\sum_k\sum_l b_{kl}\lambda_k\lambda_l.$$

于是由(3.1.22)式与(2)式表明(1)式左端

(4) $$\leqslant \sum_k \frac{1}{k}|\lambda_k|^2 - \sum_k \frac{1}{k}\sum_\mu \sum_\nu \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu z_\mu^{-k} \bar{z}_\nu^{-k}$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu \gamma_\mu \bar{\gamma}_\nu \log \frac{1}{1-(z_\mu \bar{z}_\nu)^{-1}}.$$

注 反过来，我们也可以从戈鲁辛不等式推出格隆斯基不等式。设给定 $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n \in \mathbf{C}$，选取 $z_\nu = re^{2\pi i\nu/n}$，

$$\gamma_\nu = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \lambda'_l z_\nu^l, \quad (\nu = 1, \cdots, n;\ r > 1).$$

置 $k = qn + \mu$，$\mu = 1, \cdots, n$，$q \geqslant 0$，则有

$$\lambda_k = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu z_\nu^{-k} = \sum_{l=1}^{n} \lambda'_l \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{\frac{2\pi i\nu}{n}(l-k)}\right) r^{l-k} = \lambda'_\mu r^{-qn},$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\lambda_k\lambda_l = \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}\lambda'_\mu\lambda'_\nu + O(r^{-1})(r \to \infty).$$

若应用戈鲁辛不等式，利用(3)式和(4)式，然后再令 $r \to \infty$ 即得

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}\lambda'_\mu\lambda'_\nu\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}|\lambda'_\nu|^2,$$

再令 $n \to \infty$ 便推出(3.1.22)式。

戈鲁辛不等式(1)有很多应用(见 5.3 节和 11.2 节)。我们提一下它的一些特殊情形。

当 $n = 1$ 时我们获得

(5) $$|\log g'(z)| \leqslant \log \frac{1}{1-|z|^{-2}}, \quad (z \in \Delta).$$

函数 $g(z) = z + z^{-1}$ 表明这不等式是最佳的。

若 $n = 2$，选取 $z_1 = z$，$z_2 = \zeta$，$\gamma_1 = 1$，$\gamma_2 = -1$，则(1)式成为

(6) $$\left|\log \frac{g'(z)g'(\zeta)(z-\zeta)^2}{(g(z)-g(\zeta))^2}\right| \leqslant \log \frac{|z\bar{\zeta}-1|^2}{(|z|^2-1)(|\zeta|^2-1)},$$

$$(z, \zeta \in \Delta).$$

若在(1)式中考虑实部,即得到:

推论 3.3 若 $g\in\Sigma, z_\nu\in\Delta, \gamma_\nu\in\mathbf{R}(\nu=1,2,\cdots,n)$, 则

$$\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}\left|1-\frac{1}{z_\mu z_\nu}\right|^{\gamma_\mu\gamma_\nu}\leqslant\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\right|^{\gamma_\mu\gamma_\nu}$$

$$\leqslant\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}\left|1-\frac{1}{z_\mu\bar{z}_\nu}\right|^{-\gamma_\mu\gamma_\nu}.$$

利用 3.6 节证明的关于二次型构成的结论,我们导出费茨盖拉德(1972)的一个结果:

推论 3.4 若 $g\in\Sigma$, $z_\nu\in\Delta$, $\gamma_\nu\in\mathbf{C}(\nu=1,2,\cdots,n)$, 且 $c\in\mathbf{C}$, 则

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu\left[\left(\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\right)^c-1\right]\right| \tag{7}$$

$$\leqslant\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu\left[\left(1-\frac{1}{z_\mu\bar{z}_\nu}\right)^{-|c|}-1\right].$$

事实上,若 $c=|c|e^{i\alpha}$, 在(1)式中我们以 $\gamma_\mu e^{i\frac{\alpha}{2}}$ 代替 γ_μ, 则由引理 3.10 取 $h(w)=e^{|c|w}-1$ (此函数具有非负系数)即可推出(7)式。附带指出,戈鲁辛不等式就是(7)式当 $c\to0$ 时的极限情形。

想要把戈鲁辛不等式应用于函数 $f\in S$, 依靠取 $g(\zeta)=\dfrac{1}{f(\zeta^{-1})}$ 并非总是有效的。因为 $f(z)$ 在 D 内解析从而 $g(\zeta)\neq0(|\zeta|>1)$, 而对于只包含函数的差的戈鲁辛不等式来说,增加这一条件却不起作用。

因此,我们考虑函数

$$g(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{f(\zeta^{-2})}},\quad(|\zeta|>1). \tag{8}$$

这个函数在 $1<|\zeta|<\infty$ 内解析, 因为当 $0<|z|<1$ 时 $f(z)\neq0,\infty$; 且由引理 1.2(1.2 节)知 $g(\zeta)$ 属于 Σ。因 $g(\zeta)$ 是奇函数,在(6)式中令 $z=-\zeta$ 即得到

$$\left|2\log\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right|\leqslant 2\log\frac{|\zeta|^2+1}{|\zeta|^2-1},\ (|\zeta|>1).$$

又若取 $z=\zeta^{-1}$ 并应用(8)式，则得出格隆斯基的如下结果(Grunsky 1932；也可参看 Grötzsch 1933)：

推论 3.5 若 $f\in S$，则

$$\left|\log\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad(|z|<1).\tag{9}$$

作为其直接推论有

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|},\ (|z|<1).\tag{10}$$

这就是寇勃偏差定理中的一个不等式(1.2.13)，另外两个不等式容易从(10)式推出．当然，新的不等式(9)更强一些，因为它也表明了关于辐角的一些结果．

从格隆斯基不等式我们还可得出另一组估计式．记

$$g(z,\zeta)=\frac{z\zeta g'(z)g'(\zeta)}{[g(z)-g(\zeta)]^2}-\frac{z\zeta}{(z-\zeta)^2},\ (z\neq\zeta),\tag{11}$$

我们求出

$$\begin{aligned}6g(\zeta,\zeta)&=\lim_{z\to\zeta}6g(z,\zeta)\\&=\zeta^2\frac{g'''(\zeta)}{g'(\zeta)}-\frac{3}{2}\zeta^2\left(\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right)^2.\end{aligned}\tag{12}$$

量(11)有值得注意的不变性质．例如，它在 $g(z)$ 的麦比乌斯变换下保持不变．

定理 3.4 若 $g(z)$ 在Δ内单叶，$z_\nu\in\Delta$，$\gamma_\nu\in\mathbb{C}(\nu=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu g(z_\mu,z_\nu)\right|\leqslant\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu\frac{z_\mu\bar{z}_\nu}{(z_\mu\bar{z}_\nu-1)^2}.\tag{13}$$

证 由于 $g(z,\zeta)$ 在 $g(z)$ 的麦比乌斯变换下不变，故可假定 $g\in\Sigma$．关于 z 和 ζ 微分(3.1.8)式，得到

$$g(z,\zeta)=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}klb_{kl}z^{-k}\zeta^{-l},\ (|z|>1,|\zeta|>1).$$

因此，若 λ_k 仍由(2)式给出，则由格隆斯基不等式 (3.1.22) 我们有

$$\left|\sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma_\mu\gamma_\nu g(z_\mu, z_\nu)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\, k\lambda_k\, l\lambda_l\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k|\lambda_k|^2 = \sum_{\mu}\sum_{\nu}\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu\sum_{k}(z_\mu\bar{z}_\nu)^{-k}.$$

最后的和式等于(13)式的右端。

现在设 $f(z)$ 在 D 内单叶。置 $g(\zeta) = \dfrac{1}{f(\zeta^{-1})}$，$(|\zeta| > 1)$，则由麦比乌斯变换下的不变性从 (12) 式推出量 $6z^{-2}g(z^{-1}, z^{-1})$[1] 等于

$$\{f(z), z\} = \frac{d}{dz}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2, \quad (|z| < 1),$$

即**薛瓦尔兹导数**。应用(13)式取 $n = 1$ 即推出

(14) $$|\{f(z), z\}| \leqslant \frac{6}{(1-|z|^2)^2} \quad (|z| < 1),$$

并且对寇勃函数等号成立。

问 题

1. 设 $g \in \Sigma$，证明：对 $z_\nu, \zeta_\nu \in \Delta$，$c_\nu, \gamma_\nu \in \mathbb{C}$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 有

$$\left|\sum_{\mu}\sum_{\nu} c_\mu\gamma_\nu \log\frac{g(z_\mu) - g(\zeta_\nu)}{z_\mu - \zeta_\nu}\right|^2$$

$$\leqslant \sum_{\mu}\sum_{\nu} c_\mu\bar{c}_\nu \log\frac{1}{1-(z_\mu\bar{z}_\nu)^{-1}}$$

$$\times \sum_{\mu}\sum_{\nu} \gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu \log\frac{1}{1-(\zeta_\mu\bar{\zeta}_\nu)^{-1}}$$

(Lebedev 1951)。

2. 对 $g \in \Sigma$，$|z| > 1$，$|\zeta| > 1$，试推出

$$\left|\log\frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta}\right|^2 \leqslant \log\frac{1}{1-|z|^{-2}}\log\frac{1}{1-|\zeta|^{-2}}$$

---

1) 此处原文误为 $\frac{1}{6}z^{-2}g(z^{-1}, z^{-1})$。——译者注

(Golusin 1946c)，并说明对于固定的 n 和充分大的 ζ 这结果不是最佳的.

3. 设 $g\in\Sigma$, $c\in\mathbf{C}$, $c\neq 0$, 并记

$$\left(\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\right)^c = 1 + c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}(c) z^{-k}\zeta^{-l},$$

证明格隆斯基不等式可以推广为如下形式:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{kl}(c)\lambda_k\lambda_l\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\binom{|c|+k-1}{k-1}\frac{|\lambda_k|^2}{k},\ (\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbf{C}).$$

4. 设 $g\in\Sigma$, $P(w)$ 是 n 次多项式，证明

$$\max_{w\in E}|P'(w)| \leqslant \frac{1}{2}en^2\max_{w\in E}|P(w)|$$

(Pommerenke 1959a).

3.3 一些精确的系数估计

我们应用格隆斯基不等式来获得 Σ 类和 S 类函数的系数的某些最好界限.

首先考虑函数

$$g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n} \in \Sigma_0,\quad (|z|>1).$$

这里限制 $b_0=0$ 当然是无关紧要的，仅仅是为了方便. 面积定理 (1.2.5) 蕴含 $|b_n|\leqslant n^{-\frac{1}{2}}$, $n=1,2,\cdots$. 虽然 $|b_1|\leqslant 1$ 是精确估计，但 $|b_2|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 就不再是精确的了. 并且，从格隆斯基不等式似乎也不可能直接导出其精确界限. 因此我们来考虑单叶奇函数(见 1.2 节引理 1.2):

(1)
$$\begin{aligned} g^*(z) &= \sqrt{g(z^2)-w} \\ &= z-\frac{1}{2}wz^{-1}+\left(\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{8}w^2\right)z^{-3} \\ &\quad +\left(\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{4}b_1w-\frac{1}{16}w^3\right)z^{-5}+\cdots, \end{aligned}$$

其中 $w\in E$. 根据 (3.1.3)式计算出 $g^*(z)$ 的格隆斯基系数

(2) $$b_{11}^* = -\frac{1}{2}w,\ b_{22}^* = \frac{1}{2}b_1,\ b_{33}^* = \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{24}w^3,$$

$$b_{13}^* = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{8}w^2,\ b_{24}^* = \frac{1}{2}b_2.$$

定理 3.5 (Schiffer 1938a)若 $g \in \Sigma_0$, 则

$$|b_2| \leqslant \frac{2}{3},$$

等号成立当且仅当 $g(z) = z(1 + e^{i\beta}z^{-3})^{\frac{2}{3}}, (0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi)$.

证 (Nehari 1953). 由(2)式及(3.1.16)式得出

(3) $$\left| b_2 - \frac{1}{12}w^3 \right| = 2|b_{33}^*| \leqslant \frac{2}{3}, \ (w \in E).$$

先设 $0 \in E$, 取 $w = 0$ 就直接得到 $|b_2| \leqslant \frac{2}{3}$; 且等号成立时,必有 $|b_{33}^*| = \frac{1}{3}$,再由(3.1.15)式知当 $k \neq 3$ 时有 $b_{3k}^* = 0$. 因由(1)式有 $b_1^* = -\frac{1}{2}w = 0$, $b_2^* = 0$, 于是从(3.1.7)和(3.1.11)式得到

$$g^*(z)^3 = \Phi_3^*(g(z)) = z^3 + e^{i\theta}z^{-3}, \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

因此由(1)式即知 $g(z) = z(1 + e^{i\theta}z^{-3})^{\frac{2}{3}}$.

再设 $0 \notin E$, 我们来证明 $|b_2| < \frac{2}{3}$. 因为

$$e^{-i\theta}g(e^{i\theta}z) = z + e^{-2i\theta}b_1z^{-1} + e^{-3i\theta}b_2z^{-2} + \cdots$$

仍属于 Σ_0, 故不妨设 $b_2 > 0$. 由(3)式推出

$$b_2 \leqslant \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\operatorname{Re}w^3, \ (w \in E).$$

因而只须证明存在 $w \in E$ 满足 $\operatorname{Re}w^3 < 0$ 就可以了. 如不然,即对于所有 $w \in E$ 有 $\operatorname{Re}w^3 \geqslant 0$, 因集 E 连通且不含 0 点, 从而 E 必位于三个扇形

$$\left\{ w \neq 0, \ \left|\arg w - \frac{2}{3}j\pi\right| \leqslant \frac{\pi}{6} \right\} \quad (j = 0, 1, 2)$$

中的一个之内. 这些扇形都是凸的, 故 E 的凸包不能包含 0 点,

这与(1.1.3)式相矛盾，因为已知 $b_0 = 0$。

我们已经对 $n = 1$ 与 $n = 2$ 证明了估计式

(4)
$$|b_n| \leqslant \frac{2}{n+1} \quad (g \in \Sigma)$$

对于 Σ 中的星形函数类这一估计对一切 n 成立（定理2,10）；且极值函数为 $z(1+z^{-(n+1)})^{2/(n+1)}$。然而我们将会看到，对于整个 Σ 类来说，甚至连数量级 $O(n^{-1})$ 也是不适合的（参看5.2节定理5.5）。

现在考虑函数

(5)
$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in S.$$

我们来对 $n=4$ 证明比伯巴赫猜想 (Garabedian and Schiffer 1955a; Charzyński and Schiffer 1960b)。实际上我们是证明对 $n=4$ 的罗勃松猜想(1.3.2) (Friedland 1970)。并且也就推出了广义比伯巴赫猜想(2.1节推论2.2)。

定理 3.6 设 $f(z)$ 是 S 中的奇函数，则

(6)
$$|a_3|^2 + |a_5|^2 + |a_7|^2 \leqslant \frac{5}{2} + \frac{1}{2}|a_3|^2 \leqslant 3.$$

证 函数

(7)
$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{1}{f(\zeta^{-1})} \\ &= \zeta - a_3\zeta^{-1} + (a_3^2 - a_5)\zeta^{-3} \\ &\quad + (-a_3^3 + 2a_3a_5 - a_7)\zeta^{-5} + \cdots \end{aligned}$$

属于 Σ，由(3.1.13)式它有格隆斯基系数：

$$b_{11} = -a_3,\quad b_{13} = a_3^2 - a_5,\quad b_{33} = -\frac{7}{3}a_3^3 + 3a_3a_5 - a_7.$$

由此得

(8)
$$\begin{aligned} a_3 &= -b_{11},\quad a_5 = b_{11}^2 - b_{13}, \\ a_7 &= -\frac{2}{3}b_{11}^3 + 3b_{13}b_{11} - b_{33}. \end{aligned}$$

我们已用 b_{11}，b_{13}，b_{33} 表出了 a_3，a_5，a_7，这三个格隆斯基系数在格隆斯基不等式中只出现在含 λ_1，λ_3 的项中。为简便起见，令

(9) $b_{11}=z_1,\ b_{13}=z_2,\ b_{33}=z_3,\ |z_j|=r_j\quad(j=1,2,3)$.
由(8)式和(9)式，我们要证明的是

(10) $$c\equiv|z_1|^2+|z_1^2-z_2|^2+\left|\frac{2}{3}z_1^3-3z_1z_2+z_3\right|^2\leqslant 3.$$

根据 3.6 节引理 3.6，必存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得

(11) $$\begin{pmatrix} z_1 & \sqrt{3}\,z_2 \\ \sqrt{3}\,z_2 & 3z_3 \end{pmatrix}=U'\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}U.$$

格隆斯基不等式表明 $|d_1|\leqslant 1,\ |d_2|\leqslant 1$.

现在我们证明：当 z_1, z_2, z_3 由 (11) 式给出且 $|d_1|\leqslant 1$，$|d_2|\leqslant 1$ 时就有 $c\leqslant 3$，而无须顾及 z_1, z_2, z_3 是格隆斯基系数的事实。

如 $\boldsymbol{U}$ 固定，则如(10)式所示，c 是复变量 d_1, d_2 的次调和函数。由次调和函数的最大值原理(Ahlfors 237 页)或经典的最大值原理对于若干解析函数模之和的推广，推知 c 在 $\{|d_1|\leqslant 1,\ |d_2|\leqslant 1\}$ 内于 $|d_1|=|d_2|=1$ 时取得最大值。

于是就可假定 $|d_1|=|d_2|=1$，则矩阵(11)也是酉矩阵，因此有

(12) $$r_1^2+3r_2^2=1,\quad 3r_2^2+9r_3^2=1,\quad z_1\bar{z}_2+3z_2\bar{z}_3=0,$$

特别有 $0\leqslant r_1\leqslant 1$.

若 $r_2=0$，则 $r_1=1, r_3=\frac{1}{3}$，故有 $c\leqslant 3$。于是由(8)式和(9)式因 $r_1=|a_1|$ 而推出(6)式。

若 $r_2\neq 0$，记 $t=\arg z_2-2\arg z_1$，则由(12)式得出

$$\begin{aligned} c &= r_1^2+r_1^4+r_2^2-2r_1^2r_2\cos t+\frac{4}{9}r_1^6+9r_1^2r_2^2+r_3^2 \\ &\quad -4r_1^4r_2\cos t-\frac{4}{3}r_1^3r_3\cos 2t+6r_1r_2r_3\cos t \\ &= \frac{1}{3}+\frac{34}{9}r_1^2-\frac{1}{18}r_1^4-\frac{19}{18}r_1^6-\frac{8}{9}r_1^4 \\ &\quad \times\left(\cos t+\frac{9}{4}r_2\right)^2, \end{aligned}$$

略去最后一项即得

$$C \leqslant \frac{1}{3} + \frac{34}{9} r_1^2 - \frac{1}{18} r_1^4 - \frac{19}{18} r_1^6 \tag{13}$$

$$= 3 - \frac{1}{9} \int_{r_1}^{1} (68 - 2r^2 - 57r^4) r\, dr$$

$$\leqslant 3 - \frac{1}{2}(1 - r_1^2) \leqslant 3.$$

推论 3.6 设 $f \in S$，则

$$|a_4| \leqslant \frac{7}{2} + \frac{1}{8} |a_2|^2 \leqslant 4, \tag{14}$$

将定理 3.6 应用于奇函数

$$f^*(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + a_3^* z^3 + \cdots \in S,$$

即可推出该估计式，因为由(1.3.3)式有

$$|a_4| \leqslant 1 + |a_3^*|^2 + |a_5^*|^2 + |a_7^*|^2, \quad a_2 = 2a_3^*.$$

由(14)式我们可以断定：仅当 $|a_2| = 2$ 即对于寇勃函数的旋转(见 1.2 节定理 1.5) $|a_4| = 4$ 方能成立。试比较 1.3 节提到的"局部"结果并参看 Pederson 1968b

问　　题

1. 考虑 b_{11}，试证明：若 $g \in \Sigma$ 且 $|\arg b_1| \leqslant \frac{\pi}{4}$，则

$$\operatorname{Re} b_1 \leqslant \frac{1}{2} \text{ (Duren, 1971).}$$

2. 利用 $|b_{13}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}}$ 和面积定理证明

$$|b_4| < 0.462 \quad (g \in \Sigma).$$

3. 设 $f(z) = z + a_{m+1} z^{m+1} + a_{m+2} z^{m+2} + \cdots \in S$，证明

$$|a_n| \leqslant \frac{2}{n-1} \quad (m + 1 \leqslant n \leqslant 2m)$$

(Galusin, 1938).

4. 证明：

$$|a_4| \leqslant \frac{4}{15}(11 + 2|a_3|), \quad (f \in S)$$

(Barzacva 1972).

3.4 泛系数：费茨盖拉德不等式

我们现在要对 S 类中函数 $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ 的系数进行估计，本节的结果基于费茨盖拉德(1972)的一个不等式：

定理 3.7 若 $f \in S$，则对于 $x_1, \cdots, x_N \in \mathbf{R}(N = 1, 2, \cdots)$ 有

(1) $$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 x_n\right)^2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{\mu+\nu-1} \beta_n(\mu, \nu) |a_n|^2\right) x_\mu x_\nu,$$

其中 $\beta_n(\mu, \nu) = \beta_n(\nu, \mu)$，且当 $\mu \leqslant \nu$ 时，

(2) $$\beta_n(\mu, \nu) = \begin{cases} \mu - |n - \nu|, & \text{当} |n - \nu| < \mu, \\ 0, & \text{当} |n - \nu| \geqslant \mu. \end{cases}$$

若在(1)中取 $x_1 = \cdots = x_{N-1} = 0$，作为特例我们得到

(3) $$|a_N|^4 \leqslant \sum_{n=1}^{N} n|a_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{2N-1} (2N-n)|a_n|^2 (N = 1, 2, \cdots).$$

这一不等式有一个重要的特点，左端所含系数的幂比右端高。从定理的证明中还可以看出，若 $f(z)$ 在 D 内有一个极点，(1)式仍成立。定理的证明基于如下的戈鲁辛型不等式 (FitzGerald 1972)：

引理 3.1 设 $f \in S$。若 $|z_\nu| < 1$，$\alpha_\nu \in \mathbf{R}(\nu = 1, \cdots, n; n = 1, 2, \cdots)$，则

(4) $$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \left|\frac{f(z_\nu)}{z_\nu}\right|^2\right)^2 \leqslant \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\mu \alpha_\nu \frac{|f(z_\mu) - f(z_\nu)|^2}{|z_\mu - z_\nu|^2 |1 - z_\mu \bar{z}_\nu|^2}.$$

证 将戈鲁辛不等式(定理 3.3)应用于 Σ 中函数

$$g(\zeta) = \frac{1}{f(\zeta^{-1})},$$

并在(3.2.1)式中取实部容易得到

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\mu \gamma_\nu \log \frac{|z_\mu z_\nu| |f(z_\mu) - f(z_\nu)|}{|f(z_\mu) f(z_\nu)| |z_\mu - z_\nu| |1 - z_\mu \bar{z}_\nu|} \geqslant 0$$

$$(\gamma_\nu \in \mathbb{R}).$$

这是一个实对称二次型。由引理 3.10(3.6 节) 取 $C=0$, $h(w)=e^{2w}-1$，便得到

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu\left(\left|\frac{z_\mu z_\nu}{f(z_\mu)f(z_\nu)}\right|^2\left|\frac{f(z_\mu)-f(z_\nu)}{(z_\mu-z_\nu)(1-z_\mu\bar{z}_\nu)}\right|^2-1\right)$$
$$\geqslant 0.$$

将 $\Sigma\Sigma\gamma_\mu\gamma_\nu=(\Sigma\gamma_\nu)^2$ 移到右端，然后置 $\gamma_\nu=\alpha_\nu\left|\frac{f(z_\nu)}{z_\nu}\right|^2$，就得到(4)式。

定理 3.7 的证明 在(4)式中以 N_m 取代 n，以

$$z_{p\mu}=r_p e^{\frac{2\pi i\mu}{m}},\quad \alpha_{p\mu}=\frac{1}{m}\gamma_p$$

$$(p=1,\cdots,N,\ \mu=1,\cdots,m)$$

取代 z_ν, α_ν，其中 $0<r_p<1$。然后令 $m\to\infty$，则(4)式中的和式变为积分而得到

$$(5)\qquad \left(\sum_{p=1}^{N}\frac{\gamma_p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(r_pe^{it})}{r_pe^{it}}\right|^2dt\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\frac{\gamma_p\gamma_q}{(2\pi)^2}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(r_pe^{is})-f(r_qe^{it})}{(r_pe^{is}-r_qe^{it})(1-r_pr_qe^{i(s-t)})}\right|^2ds\,dt.$$

现在来计算这些积分的值。因为

$$(6)\qquad \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{k+l+1}z^k\zeta^l,$$

$$\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}=\sum_{j=0}^{\infty}z^j\bar{\zeta}^j,$$

所以(5)式右端的被积函数可写成

$$\sum_{k,l,j\geqslant 0}\sum_{k',l',j'\geqslant 0}a_{k+l+1}\bar{a}_{k'+l'+1}r_p^{k+j+k'+j'}r_q^{l+j+l'+j'}e^{i(k+j-k'-j')s}e^{i(l-j-l'+j')t}.$$

积分之，则除去适合 $k+j=k'+j'$ 和 $l-j=l'-j'$ 的那些

项之外皆为零. 引进新的求和变量

$$n=k+l+1=k'+l'+1,\quad \mu=k+j+1=k'+j'+1,$$
$$\nu=l+j'+1=l'+j+1,$$

并消去除 j 之外的旧变量,即知(5)式右端的积分等于

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r_p^{2(\mu-1)} r_q^{2(\nu-1)}\beta_n(\mu,\nu), \tag{7}$$

其中 $\beta_n(\mu,\nu)$ 是满足条件

$$0\leqslant j\leqslant \mu+\nu-n-1,\quad \mu-n\leqslant j\leqslant \mu-1,$$
$$\nu-n\leqslant j\leqslant \nu-1$$

的整数 j 的数目. 若 $\mu\leqslant\nu$, 这些条件化为: 对 $n\leqslant\nu$ 有 $\nu-n\leqslant j\leqslant\mu-1$, 对 $n>\nu$ 有 $0\leqslant j\leqslant\mu+\nu-n-1$. 因此解的数目由(2)式给出。

由帕塞伐尔公式, (5)式左端的积分等于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 r^{2(n-1)}$. 故由(5)式和(7)式推出

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\lambda_n\right)^2\leqslant\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\lambda_\mu\lambda_\nu\beta_n(\mu,\nu), \tag{8}$$

其中

$$\lambda_\nu=\sum_{p=1}^{N}\gamma_p r_p^{2(\nu-1)}\quad(\nu=1,2,\cdots). \tag{9}$$

设 $0<s_1<\cdots<s_N<1$, 对于 $n=1,\cdots,N$, 我们能够取到实数 $\alpha_{np}(p=1,\cdots,N)$ 使得

$$\sum_{p=1}^{N}s_p^{2(\nu-1)}\alpha_{np}=\begin{cases}x_n & 对\ \nu=n,\\ 0 & 对\ \nu=1,\cdots,N,\ \nu\neq n,\end{cases} \tag{10}$$

因为这个方程组的范德蒙 (Vandermonde) 行列式不为0. 置

$$r_p=\delta s_p,\quad \gamma_p=\sum_{n=1}^{N}\delta^{-2(n-1)}\alpha_{np}\ (p=1,\cdots,N), \tag{11}$$

其中 $0<\delta<1$. 则由(9)式而有

$$\lambda_\nu=\lambda_\nu(\delta)=\sum_{n=1}^{N}\delta^{2(\nu-n)}\sum_{p=1}^{N}s_p^{2(\nu-1)}\alpha_{np}\quad(\nu=1,2,\cdots). \tag{12}$$

因此从 (10) 式推出 $\lambda_\nu = x_\nu (1 \leqslant \nu \leqslant N)$. 但 (12) 式表明 $|\lambda_\nu| \leqslant K\delta^{\lambda(\nu-N)} (\nu > N)$, 其中$K$与 ν 和 δ 都无关、因而可在(8)式中令 $\delta \to 0$, 并利用比如 $a_n = o(2^n) (n \to \infty)$ 便得到(1)式。

引理 3.2 若 $\beta_n(\mu, \nu) (\mu \leqslant \nu)$ 由(2)式定义，则

$$
(13) \qquad \sum_{n=1}^{\mu+\nu-1} n^2 \beta_n(\mu, \nu) = \mu^2\nu^2 + \frac{1}{6}\mu^2(\mu^2 - 1) < \mu^2\nu^2\left(1 + \frac{\mu^2}{6\nu^2}\right)
$$

证 由(2)式有

$$
\sum_{n=1}^{\mu+\nu-1} n^2 \beta_n(\mu, \nu) = \sum_{k=-\mu}^{\mu} (\nu + k)^2 (\mu - |k|)
$$

$$
= \nu^2\mu + 2\sum_{k=1}^{\mu} (\nu^2\mu - \nu^2 k + \mu k^2 - k^3).
$$

由幂和公式便可推出(13)式。

现在我们来推导费茨盖拉德(1972)给出的目前所知的最好的系数一致估计. 在这一估计之前的较弱的估计曾在 1.3 节中提到过。

定理 3.8 若 $f \in S$, 则

$$
(14) \qquad |a_n| \leqslant \sqrt{\frac{7}{6}}\, n < 1.081n \quad (n = 2, 3, \cdots).
$$

证 假设(14)式不成立。则存在第一个 n_1, 使得

$$
|a_{n_1}|^2 > \frac{7}{6} n_1^2.
$$

比如说,

$$
|a_{n_1}|^2 = \frac{7}{6} c n_1^2, \quad c > 1.
$$

则由定理 3.7 (见(3)式)及引理 3.2 便推出:

$$
\left(\frac{7}{6}\right)^2 c^2 n_1^4 = |a_{n_1}|^4 \leqslant \sum_{n=1}^{2n_1-1} \beta_n(n_1, n_1) |a_n|^2
$$

$$\leqslant \frac{7}{6} n_1^4 \max_{1 \leqslant n \leqslant 2n_1} \frac{|a_n|^2}{n^2};$$

故存在第一个 n_2, $n_1 < n_2 < 2n_1$, 使得

$$|a_{n_2}|^2 \geqslant \frac{7}{6} c^2 n_2^2.$$

如此继续进行下去便得到一个序列 (n_k) 满足 $n_k < n_{k+1} < 2n_k$, 使得

$$|a_{n_k}|^2 \geqslant \frac{7}{6} c^{2^{k-1}} n_k^2 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

且 $n_k \leqslant 2^k n_1$ 且 $c > 1$, 故推出

$$\limsup_{k \to \infty} |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \geqslant c^{\frac{1}{4n_1}} > 1.$$

这是不可能的,因为 $f(z)$ 在 D 内解析。

定理 3.9 若 $f \in S$, 则

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{n} < 1, \tag{15}$$

除非 $f(z)$ 是寇勃函数的旋转。

由此推知,对一切 n, 或者 $|a_n| = n$, 或者

$$|a_n| < n, \quad 当 \ n > n_0(f). \tag{16}$$

注 $n_0(f)$ 可能与 f 有关。比伯巴赫猜想的这一渐近形式首先由海曼(1955a)证明,他所证明的结论更强, lim sup 可代之以 lim(也可参看 Hayman 104 页和 Bazilevič 1967)。我们这里给出的不同证明属于费茨盖拉德(1972)。

证 不妨设

$$\alpha = \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{n} > 0. \tag{17}$$

则由定理 3.8 得出 $\alpha \leqslant \sqrt{\frac{7}{6}} < \infty$. 下边我们需要利用下一节将证明的定理 3.10 的一个很弱的推论:

$$|a_{n+1}| - |a_n| = o(n) \quad (n \to \infty). \tag{18}$$

给定ε，$0<\varepsilon<\frac{\alpha}{2}$．由(17)和(18)式，可选取序列$(n_k)$，使得 $n_k<\varepsilon n_{k+1}$ 且

(19)
$$|a_{n_k}|>(\alpha-\varepsilon)n_k,\quad |a_{n_k\pm1}|>(\alpha-\varepsilon)n_k,\quad (k=1,2,\cdots).$$

设我们选取了足够大的 $n_1>2$，当 $n\geqslant n_1$ 时，

(20)
$$|a_n|<(\alpha+\varepsilon)n.$$

设 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{16}\alpha^2$，$x_2=-tl$ $(l=1,2,\cdots)$，$x_{n_k}=\frac{1}{n_k^2}$ $(k=1,\cdots,l)$，其余的 $x_n=0$．应用定理3.7便得到

(21)
$$\left(\sum_{k=1}^{l}\left|\frac{a_{n_k}}{n_k}\right|^2-tl|a_2|^2\right)^2$$
$$\leqslant\sum_n\left[\beta_n(2,2)l^2t^2-2\sum_{k=1}^{l}\beta_n(2,n_k)\frac{tl}{n_k^2}+\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\beta_n(n_k,n_j)\frac{1}{n_k^2n_j^2}\right]|a_n|^2.$$

由(2)式，有

$$\beta_n(2,m)=\begin{cases}2 & \text{对 } n=m,\\ 1 & \text{对 } n=m\pm1,\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

利用 $t|a_2|^2\leqslant 4t<\frac{1}{4}\alpha^2<(\alpha-\varepsilon)^2$，我们用(19)式来估计(21)式的左端．如果对(21)式右端第二项也应用(19)式，就得到

$$[(\alpha-\varepsilon)^2-t|a_2|^2]^2l^2$$
$$\leqslant(1+2|a_2|^2+|a_3|^2)l^2t^2-8(\alpha-\varepsilon)^2l^2t$$
$$+\sum_{k=1}^{l}\left(\sum_n\beta_n(n_k,n_k)|a_n|^2\right)\frac{1}{n_k^4}$$
$$+2\sum_{\substack{k=1\\k<j}}^{l}\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_n\beta_n(n_k,n_j)|a_n|^2\right)\frac{1}{n_k^2n_j^2}.$$

若 $k<j$，则 $n_k<\varepsilon n_j$．由(2)式推出 $n_j-n_k\geqslant n_j-n_{j-1}>$

$n_{j-1} \geqslant n_1$，因而对于 $n \leqslant n_1$ 有 $\beta_n(n_k, n_j) = 0$. 于是由定理 3.8，引理 3.2 以及(20)式得出

(22) $$[(\alpha-\varepsilon)^2 - t|a_2|^2]^2 l^2 \leqslant (1 + 2|a_2|^2 + |a_3|^2)l^2 t^2 - 8(\alpha-\varepsilon)^2 l^2 t + \frac{49}{36} l + (\alpha+\varepsilon)^2\left(1 + \frac{1}{6}\varepsilon^2\right) l(l-1).$$

以 l^2 除(22)式，然后令 $l \to \infty$，$\varepsilon \to 0$ 便得到

(23) $$(\alpha^2 - t|a_2|^2)^2 \leqslant (1 + 2|a_2|^2 + |a_3|^2)t^2 - 8\alpha^2 t + \alpha^2$$
$$\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{16}\alpha^2\right).$$

取 $t = 0$ 便知有 $\alpha = 1$. 现在假定 $\alpha = 1$，在(23)式两边减去 1，除以 t，然后令 $t \to +0$，则得 $|a_2| \geqslant 2$，而由 1.2 节定理 1.5 知此时 $f(z)$ 是克勃函数的旋转。

问　　题

1. 试由定理 3.8 导出一个更强的不等式

$$|a_n|^2 < \frac{7}{6} n^2 - \frac{1}{12} \quad (n = 1, 2, \cdots; f \in S).$$

2. 设 $f \in S$ 具有实系数。利用引理 3.1 去掉平方的类似结果试证明

$$a_n^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

从而有 $|a_n| \leqslant n$ (FitzGerald 1972；比较推论 2.6)。

3.5 泛系数：米林方法

1. 把格隆斯基不等式应用于系数问题的另一种方法是由米林提出来的 (Milin 1964, 1965, 1967, 1968)。

格隆斯基不等式提供给我们的是关于 $\dfrac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta}$ 的对数的原始信息，而我们所需要的却是关于差商及其倒数的信息，这便是困难之所在。这一障碍被列别杰夫与米林的结果克服了，他们的结果使我们能够从其对数之系数的估计导出函数系数的估计 (Milin 43—66 页，Aharonov 1971)。

给定 $\alpha_k \in \mathbf{C}$ $(k=1, 2, \cdots)$，数 $\beta_n (n=0, 1, \cdots)$由形式幂级数

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k\right]$$

确定。于是有 $\beta_0 = 1$，并且由形式微分给出，

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n z^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k z^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n.$$

比较系数而得递推公式

$$(2) \qquad \beta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k \beta_{n-k}, \quad (n=1,2,\cdots).$$

例 3.2 取$\alpha_k = \frac{1}{k} c^k$，$c \in \mathbf{C}$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n = \exp\left(\log \frac{1}{1-cz}\right) = \frac{1}{1-cz}.$$

因而$\beta_n = c^n (n=0,1,\cdots)$.此例在下列三个引理中都是"极值"。

引理 3.3 对 $n=0,1,\cdots$，定义

$$(3) \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \exp\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k+1)}{n+1} |\alpha_k|^2\right] \times \sum_{\nu=0}^{n} |\beta_\nu|^2,$$

则

$$(4) \qquad \sigma_n \leqslant \sigma_{n-1} \leqslant 1, \quad (n=1, 2, \cdots),$$

且对$\alpha_k = \frac{1}{k} c^k$ $(|c|=1)$ 和 $\beta_n = c^n$ 等号成立。

证 应用薛瓦尔兹不等式于递推公式(2)，我们得到

$$(5) \qquad |\beta_n|^2 \leqslant \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 |\alpha_k|^2 \sum_{\nu=0}^{n-1} |\beta_\nu|^2.$$

这一不等式又可表为

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\beta_\nu|^2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 |\alpha_k|^2\right) \sum_{\nu=0}^{n-1} |\beta_\nu|^2.$$

利用不等式 $x \leqslant e^{x-1}(x \in \mathbf{R})$，我们推出

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|\beta_\nu|^2 \leqslant \left(\frac{n}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2\right)$$
$$\times\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|\beta_\nu|^2 \leqslant \exp\left[-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right.$$
$$\left.\times\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2\right]\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}|\beta_\nu|^2.$$

可以验证这一不等式即等价于 $\sigma_n \leqslant \sigma_{n-1}$，从而因 $\sigma_0 = 1$ 而得到(4)式。易知对于 $\alpha_k = \frac{1}{k}c^k$，$|c| = 1$ 有 $\sigma_n \equiv 1$。

依惯例我们以 $C = 0.57721\cdots$ 表示欧拉常数，由于

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \log\left(n+\frac{1}{2}\right)+C,\quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{6}$$

从(3)式及 $\sigma_n \leqslant 1$，我们推出

$$\sum_{\nu=0}^{n}|\beta_\nu|^2 < \exp\left[\sum_{k=1}^{n}k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2+1-C\right], \tag{7}$$
$$n = 1, 2, \cdots.$$

注意指数中含有一个负项。

引理 3.4 *若 $\sigma_n(n = 1, 2, \cdots)$ 由(3)式定义，则*

$$|\beta_n|^2 \leqslant \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right] \tag{8}$$
$$\leqslant \exp\left[\sum_{k=1}^{n}\left(k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right],$$

并且对于 $\alpha_k = \frac{1}{k}c^k$ $(|c| = 1)$ 和 $\beta_n = c^n$ 等号成立。

证 由(3)式和(5)式得到

$$|\beta_n|^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2$$

$$\cdot\ \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k(n-k)}{n}|\alpha_k|^2-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right]$$

$$\leqslant \sigma_{n-1}\exp\left[\sum_{k=1}^{n}k|\alpha_k|^2-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right],$$

其中再次用到不等式 $x\leqslant e^{x-1}(x\in \mathbf{R})$，并且由 $\sigma_{n-1}\leqslant 1$ 而得出(8)式．关于等号的论述则是平凡的．

作为(8)式的推论，我们结合(6)式得到

(9) $$|\beta_n|<\frac{1}{\sqrt{n}}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k|\alpha_k|^2-\frac{C}{2}\right],\ (n=1,2,\cdots).$$

又由于当 $n\geqslant 2$ 时，$\sigma_{n-1}\leqslant\sigma_1$，并且由(2)式有 $\beta_1=\alpha_1$，故由(8)式和(3)式还得到

(10) $$|\beta_n|^2\leqslant\frac{1}{2}(1+|\alpha_1|^2)$$

$$\cdot\exp\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|\alpha_1|^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right]$$

$$(n=2,\ 3\cdots).$$

引理 3.5 若下式右端收敛，则

(11) $$\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n|^2\leqslant\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2\right],$$

并且对 $\alpha_k=\frac{1}{k}c^k(|c|<1)$ 和 $\beta_n=c^n$ 等号成立．

证 薛瓦尔兹不等式对于递推公式(2)的另一应用给出：

(12) $$n|\beta_n|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k\beta_{n-k}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2|\beta_{n-k}|^2,\ (n=1,2,\cdots).$$

若定义

$$\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2x^k,$$

$$\beta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_n|^2x^n,\ (0\leqslant x<1),$$

则由(12)式可推出 $\beta'(x)\leqslant\alpha'(x)\beta(x)$. 因$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=1$, 从而,

$$\log\beta(x)=\int_0^x\frac{\beta'(\xi)}{\beta(\xi)}d\xi\leqslant\int_0^x\alpha'(\xi)d\xi=\alpha(x).$$

令 $x\to1-0$ 便得到(11)式.

2. 1963 年, 海曼证明了一个引人注目的结果: 对 $f\in S$, 有

(13) $$\big||a_{n+1}|-|a_n|\big|\leqslant K,\ (n=1,2,\cdots),$$

其中K是某个绝对常数. 这一结果改进了戈鲁辛 (1946a) 和比尔那契(1956)以前的估计. 现在我们证明米林和伊利娜的更精确的估计 (Milin 1968; Ilina 1968).

定理 3.10 设 $f\in S$, 则

(14) $$-3.64<|a_{n+1}|-|a_n|<4.18,\ (n=1,2,\cdots).$$

证 首先,我们考虑函数 $g(z)=1/f(z^{-1})\in\Sigma$, 它满足

(15) $$\frac{1}{g(z)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},\ (|z|>1).$$

设 $b_{kl}(k,l=1,2,\cdots)$ 是 $g(z)$ 的格隆斯基系数并定义

(16) $$\alpha_k(\zeta)=\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\zeta^{-l},\ (|\zeta|>1,\ k=1,2,\cdots),$$

(17) $$h(z,\zeta)=\frac{z-\zeta}{g(z)-g(\zeta)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_\nu(\zeta)z^{-\nu},$$
$$(|z|>1,\ |\zeta|>1).$$

则由(3.1.8)式得到

(18) $$\log h(z,\zeta)=\log\frac{z-\zeta}{g(z)-g(\zeta)}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\zeta)z^{-k}.$$

于是 $\alpha_k=\alpha_k(\zeta)$ 和 $\beta_\nu=\beta_\nu(\zeta)$ 便以(1)式所确定的指数关系相关联. 且由(18)式和(17)式有

(19) $$\frac{d}{dz}\log h(z,\zeta)=\frac{1}{z-\zeta}-\frac{g'(z)}{g(z)-g(\zeta)}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k(\zeta) z^{-k-1},$$

(20) $$\frac{d}{dz} h(z, \zeta) = \frac{1}{g(z)-g(\zeta)} - \frac{(z-\zeta)g'(z)}{(g(z)-g(\zeta))^2}$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu\beta_\nu(\zeta) z^{-\nu-1}.$$

我们以从(15)式导出的展开式

(21) $$\frac{d}{dz}\frac{z-\zeta}{g(z)} = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-\zeta a_n}{z^n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(a_{n+1}-\zeta a_n)z^{-n-1}}{z^{n+1}}$$

作为出发点，由(20)，(17)及(19)式得到

(22) $$\frac{d}{dz}\frac{z-\zeta}{g(z)}$$

$$= \frac{d}{dz} h(z, \zeta) - \frac{g(\zeta)}{g(z)} h(z,\zeta) \frac{d}{dz} \log h(z, \zeta)$$

$$- g(\zeta)h(z,\zeta)\frac{d}{dz}\frac{1}{g(z)}.$$

这一关系式虽然比较复杂，但我们将会看到，它将引出一些很合算的估计。

现在设 $r > 1$，选取 ζ 使得

(23) $$|g(\zeta)| = \min_{|z|=r} |g(z)| = \frac{1}{M(r)}, \quad |\zeta| = r,$$

其中

(24) $$M(r) = \max_{|t|=\frac{1}{r}} |f(t)|.$$

把 $\alpha_k(\zeta)$ 和 $\beta_\nu(\zeta)$ 简记为 α_k，β_ν，以 z^n 乘(21)式，然后沿 $|z|=r$ 积分并利用表示式(22)，则由(20)，(17)，(18)及(15)式得到

(25) $$-n(a_{n+1}-\zeta a_n) = -n\beta_n$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n\frac{g(\zeta)}{g(z)}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\beta_\nu}{z^\nu}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\alpha_k}{z^{k+1}}\,dz$$

$$+\frac{g(\zeta)}{2\pi i}\int_{|z|=r} z^n\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{\beta_\mu}{z^\mu}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu a_\nu}{z^{\nu+1}}\,dz.$$

其中之所以允许用幂级数展开式的适当部分和来代替函数，是因为余下部分对积分值无影响。第一个积分中用到了 $g(\infty)=\infty$。

现在在格隆斯基不等式(3.1.21)中取 $\lambda_k=\zeta^{-k}$，结合(16)式，且由于 $|\zeta|=r>1$ 而有

$$(26)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}\zeta^{-l}\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}r^{-2k}=\log\frac{1}{1-r^{-2}}.$$

我们利用这一不等式以及前面证明的诸引理来估计(25)式右边的三项。

(i) 因 $e^{-\frac{C}{2}}<\frac{3}{4}$，故由(9)式和(26)式得到

$$n|\beta_n|<\sqrt{n}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}k|\alpha_k|^2-\frac{C}{2}\right] \leqslant\frac{3}{4}\sqrt{n}\,(1-r^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

(ii) 因由(23)式有 $|g(\zeta)|\leqslant|g(w)|$，故(25)式的第二项以

$$\frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_\nu r^{-\nu}e^{-i\nu\theta}\right|\left|\sum_{k=1}^{n-1}k\alpha_k r^{-k}e^{-ik\theta}\right|d\theta$$

为界。应用薛瓦尔兹不等式，然后用帕塞伐尔公式计算所得两个积分，即知上述积分表达式

$$\leqslant r^n\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|\beta_\nu|^2r^{-2\nu}\sum_{k=1}^{n-1}k^2|\alpha_k|^2r^{-2k}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant r^{n-1}\sqrt{n}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}|\beta_\nu|^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k^2|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

用(7)式(以 $n-1$ 代 n)估计第一个和，而用 $x\leqslant e^{x-1}$ 估计第二个和，再由(26)式推知(25)式的第二项

$$\leqslant r^{n-1}\sqrt{n}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k|\alpha_k|^2-\frac{C}{2}\right]$$

$$\leqslant \frac{3}{4} r^{n-1}\sqrt{n}(1-r^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

(iii) 由薛瓦尔兹不等式及帕塞伐尔公式计算得 (25) 式的最后一项要为

$$(27) \qquad |g(\zeta)| r^n \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu|^2 r^{-2\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^2 |a_\nu|^2 r^{-2\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |g(\zeta)| r^n \sqrt{n} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu|^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{-2\nu}\right)^{\frac{1}{2}}$$

所界. 因 $f(s)$ 在 $|s|<1$ 内单叶, 故由(24)及(23)式而有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2 r^{-2\nu} = \frac{1}{\pi} \iint_{|s|=\frac{1}{r}} |f'(s)|^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \text{area} \left\{f(s): |s| \leqslant \frac{1}{r}\right\} \leqslant M(r)^2$$

$$= |g(\zeta)|^{-2}.$$

且由引理3.5 及(26)式有

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\beta_\nu|^2 \leqslant \exp \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 \leqslant \frac{1}{1-r^{-2}}.$$

这样,由(27)式便得出(25)的最后一项

$$\leqslant r^n \sqrt{n} (1-r^{-2})^{-\frac{1}{2}}.$$

综合在(i), (ii), (iii)中所得关于(25)式右端各项估计表明:

$$(28) \quad n|a_{n+1} - \zeta a_n| \leqslant \sqrt{n} \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} r^{n-1} + r^n\right) \frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}.$$

因 $n=1$ 时定理结论可从 $|a_2| \leqslant 2$ 得出,故不妨设 $n \geqslant 2$, 并选取 $r = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}^{-\frac{1}{2}}$. 因有

$$r^{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n-1}{2}} < e^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}} = \sqrt{n},$$

则在(28)式两边乘以 $\frac{1}{nr}$ 而得到

(29) $$\left|\sqrt{1-\frac{1}{n}}\,a_{n+1}-\frac{1}{r}\zeta a_n\right|$$

$$\leqslant \frac{3}{4}\left(1+e^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}+e^{\frac{1}{2}}.$$

注意 $|\zeta|=r$，所以上式首先可得到下界:

$$|a_{n+1}|-|a_n| > \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,|a_{n+1}|-|a_n|$$

$$> -\frac{3}{4}\left(1+e^{\frac{1}{2}}\right)-e^{\frac{1}{2}} > -3.64.$$

在相反的方向上，我们使用 3.4 节定理 3.8:

$$|a_{n+1}| < 1.081(n+1),$$

并根据(29)式推出，对 $n \geqslant 2$ 有

$$|a_{n+1}|-|a_n| \leqslant \left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)|a_{n+1}|$$

$$+\frac{3}{4}\left(1+e^{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}+e^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.081\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8n}\right)$$

$$+1.986\left(1-\frac{1}{2n}\right)+1.649 < 4.18.$$

这就证明了定理 3.10.

3. 在转向讨论 S 类中的奇函数之前，我们首先来证明关于 $g\in\Sigma$ 的法贝尔多项式 $\Phi_k(w)$ 的一个估计 (Pommerenke 1964a; Milin 1967):

定理 3.11 若 $g\in\Sigma$，$E=\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$，则

(30) $$\max_{w\in E}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\Phi_k(w)|^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+1.248,$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

证 设 $|z|=r>1$，由 $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$，根据 (3.1.11) 式得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\Phi_k(g(z))|^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|z|^{2k}$$

$$+2\sum_{k=1}^{n} k\left|\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} z^{-l}\right|^{2},$$

类似于(26)式我们推出

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}|\Phi_{k}(g(z))|^{2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,|z|^{2k} + 2\log\frac{1}{1-r^{-2}}.$$

取 $h_n = 1+\cdots+\frac{1}{n}$, $x=\log r>0$，则上式右端

$$=2h_n + 4\int_0^x \frac{e^{2n\tau}-1}{e^{2\tau}-1}\, e^{2\tau}d\tau + 2\log\frac{1}{1-e^{-2x}}$$

$$\leqslant 2h_n + 2\int_0^x \frac{1}{\tau}\left(e^{(2n+1)\tau}-1\right)d\tau - 2\int_0^x\left(\frac{e^{\tau}-1}{\tau}-1\right)d\tau$$

$$+2\log\frac{1}{2x}.$$

这是由于对 $\tau\geqslant 0$ 有 $e^{2\tau}-1\geqslant 2\tau e^{\tau}$.

因第二个积分为正，且由(6)式知 $\log\left(n+\frac{1}{2}\right) < h_n - C$，我们选取 $x=\frac{\xi}{2n+1}$ 而得到

(31) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\Phi_{k}(g(z))|^{2} \leqslant 4h_n + 2\int_0^{\xi}\frac{e^{t}-1}{t}\,dt - 2\log\xi - 2C,$$

其最佳选择是 $\xi=\log 2$，积分值可由指数积分表求得．因 $\Phi_k(w)$ 在 $\mathbf{C}$ 内解析且 $E\subset\mathbf{C}\backslash\{g(z):|z|>r\}$，由次调和函数的最大值原理及(31)式获得

$$\max_{w\in E}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,|\Phi_k(w)|^{2} < \max_{|z|=r}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,|\Phi_k(g(z))|^{2}$$

$$< 4h_n + 1.248.$$

将证明的开头部分略加修改，还可证明

(32) $$\max_{w\in E}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,|\Phi_k(w)|^{2} \leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 0.752.$$

现在我们来考虑单叶奇函数

(33) $$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} \quad (|z| < 1)$$

(Littlewood and Paley 1932; Lewin 1935). 由定理 3.10 推出 $|a_{2n+1}| < 3.64$. 下面我们来证明米林给出的目前所知的最好的估计(Milin 1967).

定理 3.12 若 $f(z)$ 是 S 中的奇函数，则

(34) $$|a_{2n+1}| < 1.17, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

若还满足 $|a_3| < 0.525$，则

(35) $$|a_{2n+1}| < 1, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

注 (34)中的常数 1.17 不可能换为1. 因为事实上，裴开特与宰格 (Fekete and Szegö, 1933) 已经给出最佳界限

$$|a_5| \leqslant \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} \approx 1.013$$

(见 6.2 节)；沙菲尔与斯潘塞尔 (1943) 还已证明了甚至对每个 $n > 1$ 都有 $\max\{|a_{2n+1}| : f \in S \text{ 奇}\} > 1$. 另一方面，海曼也已证明(1955$a$，他的书 115 页)：对于 S 中每个奇函数有

$$|a_{2n+1}| \leqslant 1 (n > n_0(f)).$$

证 (a) 因 $f(z)$ 为奇函数并且单叶，故函数

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right)^{-2}$$

属于 Σ. 由法贝尔多项式的定义及(33)式，我们有

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} z^n = \frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \left(\frac{g(z^{-1})}{z^{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Phi_k(0) z^k\right].$$

因此令

(36) $$\alpha_k = \frac{1}{2k} \Phi_k(0), \quad \beta_n = a_{2n+1}$$

时可满足关系式(1). 特别地，$\beta_1 = \alpha_1 = a_3$. 以此应用引理 3.4 而得到

$$|a_{2n+1}|^2 \leqslant \exp\left[\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\Phi_k(0)|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right].$$

因 $0 \in E$，故由定理 3.11 即得

$$|a_{2n+1}|^2 \leqslant \exp 0.312 < 1.17^2.$$

(b) 由(10)式与(36)式得到

$$(37)\quad |a_{2n+1}|^2 \leqslant \frac{1+|a_3|^2}{2}\exp\left[\frac{1-|a_3|^2}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}|\Phi_k(0)|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right], \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

因由(36)式知 $\frac{1}{2}\Phi_1(0) = a_3$，故从(32)式得到

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}|\Phi_k(0)|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + |a_3|^2 - 0.188,$$

于是由(37)式有

$$(38)\quad |a_{2n+1}|^2 \leqslant \frac{1+|a_3|^2}{2}\exp\left[\frac{1+|a_3|^2}{2} - 0.188\right] \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

易算得若 $|a_3| < 0.525$，则 $|a_{2n+1}|^2 < 1$.

定理 3.12 的第二部分属于阿哈洛诺夫 (Aharonov 1973a). 若将它应用于奇函数 $\sqrt{f(z^2)}$，并利用(1.3.3)式，可得到如下结果(试比较(1.3.1)式)：

推论 3.7 若 $f \in S$ 且 $|a_2| < 1.05$，则

$$|a_n| < n, \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

问　　题

1. 设 $\lambda > 0$，$d_\nu = \binom{\lambda + \nu - 1}{\nu}$，$(\nu = 0, 1, \cdots)$，证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|\beta_\nu|^2}{d_\nu}$$

$$\leqslant \frac{n+\lambda}{\lambda} d_n \exp\left[\frac{1}{n+\lambda}\sum_{\nu=1}^{n} d_{n-\nu}\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{k=1}^{\nu} k|\alpha_k|^2 - \lambda^2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{1}{k}\right)\right],$$

其中 α_k 与 β_k 满足关系式(1) (Milin 44 页).

2.设 $f\in S$. 如果存在数 μ, 使得对每一 p 都有使 $a_\nu=0$ 的指标 ν, 满足对于 $p\mu\leqslant\nu<(p+1)\mu$, 则 $|a_n|$ 必有界(参看5.4节).

3.试利用对于奇函数的估计式 $|a_3|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-\frac{2}{3}}$ 的精确性证明定理3.11中的附加常数不能易为0.1.

4.设 $f(z)$ 在 D 内解析, $g(z)=z+b_2z^2+\cdots\in S$, 且 $f(z)$ 从属于 $g(z)$. 试证:

$$|a_n|<1.37n,\quad (n=1,2,\cdots).$$

进而若设 $|b_2|<0.525$, 则 $|a_n|<n$.

3.6 附录: 复矩阵

我们以大写黑体字母表示(n,n)复矩阵,以小写黑体字母表示$(n,1)$复矩阵(列向量). 以 $\boldsymbol{C}'$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵,而以 $\boldsymbol{C}^*=\bar{\boldsymbol{C}}'$ 表示其伴随矩阵. 下面叙述的结果的大部分基本上由苏尔给出 (Schur 1911, 1945b).

引理 3.6 设 $\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}$. 则存在酉矩阵$\boldsymbol{U}$使得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}'\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}, \tag{1}$$

其中$\boldsymbol{R}$ 是具有非负实元素的对角矩阵.

证 我们把这一结论简化为实对称矩阵的经典情形来证明. 记

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+i\boldsymbol{B},$$

$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为实矩阵. 考虑 $(2n,2n)$ 实对称矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}\end{pmatrix}.$$

若$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}\\ \boldsymbol{\eta}\end{pmatrix}$为它的一个特征向量,则可验证: $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\eta}\\ -\boldsymbol{\xi}\end{pmatrix}$是关于其特征值

的相反数的特征向量．因此，根据实对称矩阵的理论，这矩阵可表为

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' & Y' \\ Y' & -X' \end{pmatrix},$$

其中最后一矩阵正交．R 为对角矩阵并可不妨设为非负的．

如果定义 $U = X' + iY'$，则(1)式与(2)式等价．且由于(2)的最后一矩阵正交知 U 必为酉矩阵．

引理 3.7 若 $C' = C$，则

$$(3)\qquad \max_{z\neq 0} \frac{|Cz|}{|z|} = \max_{z\neq 0} \frac{|z'Cz|}{|z|^2} = \kappa,$$

其中 κ 是(1)式中对角矩阵 R 的最大特征值．对于满足 $Cz = \kappa\bar{z}$ 的向量 z，两种情形中的最大值均被达到．

证 利用苏尔表达式(1)，设 Uz 的几个分量为 ν_k，R 的 n 个对角元素为 κ_k，则 $0 \leqslant \kappa_k \leqslant \kappa$．因 U 是酉矩阵，便有

$$(4)\qquad |Cz|^2 = |U'RUz|^2 = |RUz|^2 = \sum_{k=1}^{n} \kappa_k^2 |\nu_k|^2$$

$$\leqslant \kappa^2 \sum_{k=1}^{n} |\nu_k|^2 = \kappa^2 |Uz|^2 = \kappa^2 |z|^2,$$

此外还有

$$(5)\qquad |z'Cz| = |(Uz)'R(Uz)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \kappa_k \nu_k^2\right|$$

$$\leqslant \kappa \sum_{k=1}^{n} |\nu_k|^2 = \kappa |z|^2.$$

若 $\kappa = \kappa_1$ 且 $\nu_1 = 1$，$\nu_k = 0$ $(k > 1)$，则(4)式和(5)式中等号成立．这意味着 $RUz = \kappa Uz = \kappa\overline{Uz}$，从而有 $Cz = \kappa\bar{z}$．

引理 3.8 设 $C = C'$，且 $A = A^*$ 为正定．则存在矩阵 B（不必为酉矩阵）与非负对角矩阵 R 使得

$$(6)\qquad C = B'RB,\quad A = B^*B.$$

证 因 A 为厄米特矩阵并且正定，故可表为 $A = ML^2M^*$，

其中 M 为酉矩阵而 L 为具有正元素的对角矩阵. 由于 $C=C'$，故矩阵

$$V=L^{-1}M'CML^{-1}$$

为对称. 由引理3.6,可找到矩阵 U 使得 $V=U'RU$，其中 R 为非负对角矩阵. 若定义 $B=ULM^*$，则

$$C=MLVLM^*=MLU'RULM^*=B'RB,$$
$$A=MLU^*ULM^*=B^*B.$$

在以下两个引理中，所有指标均为由 1 到 n.

引理 3.9 设 $C=(c_{kl})=C'$，$A=(a_{kl})=A^*$，且

$$(7)\quad \left|\sum_k\sum_l c_{kl}z_kz_l\right|\leqslant\sum_k\sum_l a_{kl}\bar{z}_kz_l\quad (z_1,\cdots,z_n\in C);$$

同时对于矩阵 $\tilde{C}$ 与 $\tilde{A}$ 亦有相应的关系，则

$$(8)\quad \left|\sum_k\sum_l c_{kl}\tilde{c}_{kl}z_kz_l\right|\leqslant\sum_k\sum_l a_{kl}\tilde{a}_{kl}\bar{z}_kz_l,\quad (z_1,\cdots,z_n\in C).$$

证 由(7)式知 A 为半正定矩阵，通过给 A 加上单位矩阵的一个小倍数,可假定 A 正定. 依照引理 3.8 选取 $B=(v_{kl})$，并用如(5)式类似方法可以从(7)式推出 (6)式中的矩阵 R 的元素满足 $0\leqslant k_j\leqslant 1$. 根据(6)式，

$$\left|\sum_k\sum_l c_{kl}\tilde{c}_{kl}z_kz_l\right|=\left|\sum_k\sum_l\left(\sum_j k_jv_{jk}v_{jl}\right)\tilde{c}_{kl}z_kz_l\right|$$
$$\leqslant\sum_j\left|\sum_k\sum_l\tilde{c}_{kl}(v_{jk}z_k)(v_{jl}z_l)\right|.$$

由于 $A=B^*B$，又由 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{A}$ 相应于(7)的不等式成立，而知上式

$$\leqslant\sum_j\sum_k\sum_l\tilde{a}_{kl}(\bar{v}_{jk}\bar{z}_k)(v_{jl}z_l)=\sum_k\sum_l a_{kl}\tilde{a}_{kl}\bar{z}_kz_l.$$

引理 3.10 设 $C=C'$，$A=A^*$ 并且满足不等式 (7). 如果 $h(w)$ 为具有非负系数的整函数，则

$$(9)\quad \left|\sum_k\sum_l h(c_{kl})z_kz_l\right|\leqslant\sum_k\sum_l h(a_{kl})\bar{z}_kz_l,$$
$$(z_1,\cdots,z_n\in C).$$

证 重复应用引理 3.9 即表明

$$\left|\sum_k \sum_l c_{kl}^{\nu} z_k z_l\right| \leqslant \sum_k \sum_l a_{kl}^{\nu} \bar{z}_k z_l, \quad (\nu = 0, 1, \cdots).$$

两端乘以 $h(w)$ 的非负系数并对 $\nu = 0, 1, \cdots$ 作和便得到(9)式.

第四章　格隆斯基不等式的推广

我们来推广格隆斯基不等式，使之包含更多的关于 $g\in\Sigma$ 的信息。首先考虑 $E=\hat{\mathbf{C}}\backslash g(\Delta)$ 包含有一个区域的情形，并将这个区域的映照函数 $f(z)$ 同函数 g 放在一起进行研究。稍经变换，有界单叶函数便成为其特殊情形。

格拉贝定-谢非尔不等式是对格隆斯基不等式的另一推广．这一不等式包含有函数所不取的两个值。不过其证明相当麻烦．应用格拉贝定-谢非尔不等式，我们将证明关于 Σ 和 S 类系数的某些精确估计．其中的一些估计至少难以用格隆斯基不等式的有限情形得出．因极值区域由轨线界成，它们与二次微分有着密切的联系（参见 8.2 节）．

4.1　不相交单叶函数

我们称两个函数不相交，是指如果它们的像域互不相交．考虑一对不相交单叶函数

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&f(z)=az+a_2z^2+\cdots,\ a\neq 0, &&(z\in D),\\
&g(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\cdots, &&(\zeta\in\Delta),
\end{aligned}
$$

即假设 $f(D)\cap g(\Delta)=\varnothing$．函数 $g\in\Sigma$ 能被用来作成这样一个不相交对当且仅当 $\mathbf{C}\backslash g(\Delta)$ 以 0 点为其内点。

考虑不相交对(1)的格隆斯基系数的二重无限阶矩阵．如果不要求这样两个函数有任何方式的解析相关时，这个矩阵多少有些任意性．但将会看到，正由于此我们得到格隆斯基不等式的一个简捷的推广．

我们用下面三式来定义数 $b_{kl}(k,l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$：

$$
(2)\qquad \log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}z^{-k}\zeta^{-l},
$$

$$
(|z|>1,\ |\zeta|>1),
$$

(3) $$\log\frac{g(\zeta)-f(z)}{\zeta}=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{-k,l}z^k\zeta^{-l},$$
$$(|z|<1<|\zeta|),$$

(4) $$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}b_{-k,-l}z^k\zeta^{l},$$
$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

并规定 $b_{k,-l}=b_{-l,k}$, $(k\geqslant 1, l\geqslant 0)$. 因此,

(5) $$b_{kl}=b_{lk},\ (k,l=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

显然,三个二重级数在相应的区域内收敛当且仅当(1)中两函数单叶且不相交.

对 $k,l=1,2\cdots$, 数 b_{kl} 就是 3.1 节中引入的函数 $g\in\Sigma$ 的格隆斯基系数; 对 $k,l=1,2\cdots$,数 $b_{-k,-l}$ 为函数 $\frac{1}{f(\zeta^{-1})}\in\Sigma$ 的格隆斯基系数. 且因 $f(0)=0$, 故由(3)式和(4)式可得, 对于 $|z|<1<|\zeta|$,

(6) $$\log\frac{\zeta}{g(\zeta)}=\sum_{l=1}^{\infty}b_{0l}\zeta^{-l}=-b_0\zeta^{-1}$$
$$+\left(-b_1+\frac{b_0^2}{2}\right)\zeta^{-2}+\cdots,$$

(7) $$\log\frac{z}{f(z)}=\sum_{l=0}^{\infty}b_{0,-l}z^l=-\log a$$
$$-\frac{a_2}{a}z+\left(-\frac{a_3}{a}+\frac{a_2^2}{2a}\right)z^2+\cdots.$$

从(3)式与(3.1.2)式,我们得到

(8) $$\Phi_k(f(z))=k\sum_{l=0}^{\infty}b_{k,-l}z^l,\ (k=1,2,\cdots).$$

定理 3.1 的如下推广是呼梅尔给出的 (Hummel 1972c). 其较弱的形式曾为那哈利、列别杰夫、珍肯斯和阿列尼辛等人证明过 (Nehari 1965; Lebedev 1961; Jenkins 1965; Alenicyn 1966). 对于任意多个不相交函数的情形也如此. 可参阅 Kühnau 1968 与

Aharonov 1973a.

定理 4.1 设函数 $f(z)=az+\cdots$, $(z\in D)$, 与 $g(\zeta)=\zeta+\cdots(\zeta\in\Delta)$ 单叶且不相交，令 $F=\mathbb{C}\setminus[f(D)\cup g(\Delta)]$. 设 λ_k $(-m\leqslant k\leqslant m, m=1,2\cdots)$ 是不全为零的复数. 则

$$
(9)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{l=-m}^{m} b_{kl}\lambda_l\right|^2+\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\sum_{l=-m}^{m} b_{-k,l}\lambda_l\right|^2
\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\left(|\lambda_k|^2+|\lambda_{-k}|^2\right)+2\mathrm{Re}\left[\bar{\lambda}_0\sum_{l=-m}^{m} b_{0l}\lambda_l\right],
$$

且等号成立当且仅当 $\operatorname{area} F=0$.

证 如同证明定理 3.1 一样，我们先证明一个恒等式，然后从这个恒等式直接推出定理结论.

(a) 以 $\Phi_k(w)$ 与 $\Phi_{-k}(w)$ 分别表示 Σ 中函数 $g(\zeta)$ 与 $\dfrac{a}{f(\zeta^{-1})}$ 的法贝尔多项式. 定义

$$
(10)\qquad h(w)=-\lambda_0\log w+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\Phi_k(w)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{-k}}{k}\Phi_{-k}\left(\frac{a}{w}\right).
$$

由(7),(8)与(3.1.11)式推出，当 $|z|<1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad \varphi(z)=h(f(z))&=-\lambda_0\log z+\lambda_0\log\frac{z}{f(z)}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\Phi_k(f(z))+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{-k}}{k}\Phi_{-k}\left(\frac{a}{f(z)}\right)\\
&=-\lambda_0\log z+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{-k}}{k}z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k,
\end{aligned}
$$

其中，

$$
(12)\qquad \alpha_k=\sum_{l=-m}^{m} b_{-k,l}\lambda_l\ (k=1,2\cdots),\quad \alpha_0=\sum_{l=0}^{m} b_{0l}\lambda_l.
$$

用类似方法，由(6)式，(3.1.11)式和(3.1.2)式又推出，对于 $|\zeta|>1$ 有

$$
(13)\qquad \psi(\zeta)=h(g(\zeta))=-\lambda_0\log\zeta+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\zeta^k+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\zeta^{-k},
$$

其中，

(14) $\beta_k=\sum_{l=-m}^{m} b_{k,l}\lambda_l(k=1,2\cdots)$，$\beta_0=-\sum_{l=1}^{m} b_{0,-l}\lambda_{-l}$.

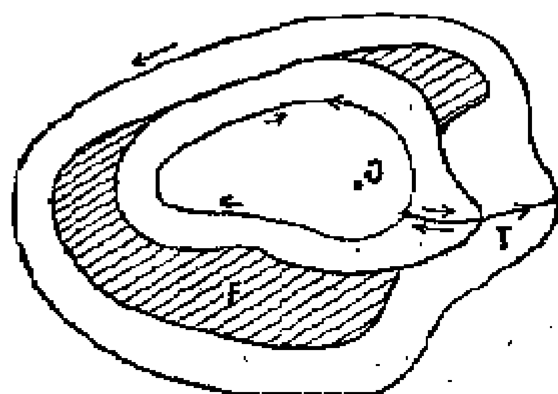


图 4.1

(b) 函数 $h(w)$ 在除去从 0 到∞的一条割线的平面内（单值）解析。我们对 $h(w)$ 应用解析的格林公式（定理 1.2)。沿曲线 $C=-A+T+B+(-T)$(见图 4.1)，其中

$$A=\{f(z):|z|=r\}(r<1),$$

$$B=\left\{g(\zeta):|\zeta|=\frac{1}{r}\right\},$$

T 为连接 $f(r)$ 与 $g\left(\frac{1}{r}\right)$，且与 A 和 B 无其它交点的光滑若当曲线。置

(15) $$H(r)=\mathbb{C}\backslash\{f(z):|z|\leqslant r\}\backslash\left\{g(\zeta):|\zeta|\geqslant\frac{1}{r}\right\}$$

$$(0<r<1).$$

曲线 C 关于点 w 的环绕次数满足

$$\chi(C,w)=\begin{cases}1, & w\in H(r)\backslash T,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

根据 (10) 式可知，$h(w)$ 在 T 的上沿和下沿的值之差为 $-2\pi i\lambda_0$，故由定理 1.2 得到

(16) $$\frac{1}{\pi}\iint_{H(\omega)\setminus T}|h'(w)|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{h(w)}\, h'(w)\,dw$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_A \bar h h' dw + \frac{1}{2\pi i}\int_B \bar h h' dw - \lambda_0\int_T h' dw,$$

其中因 $h'(w)$ 在 $\mathbf{C}\setminus\{b\}$ 内单值连续，故面积分中可删去裂纹 T。

分别作代换 $w=g(\zeta)$ 和 $w=f(z)$，便从(11),(13)与(16)式得到

(17) $$\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2 d\Omega = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\bar\varphi\varphi' dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\frac{1}{r}}\bar\psi\psi' d\zeta + \lambda_0\varphi(r) - \lambda_0\psi\left(\frac{1}{r}\right).$$

其右端第一项由(11)式得到

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\bar\varphi\varphi' dz$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\bar\lambda_0\log r + i\bar\lambda_0 t + \sum_{k=1}^{m}\frac{\bar\lambda_{-k}}{k} r^{-k}e^{ikt}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}\bar a_k r^k e^{-ikt}\right)\left(\sum_{k=0}^{m}\lambda_{-k}r^{-k}e^{-ikt} - \sum_{k=1}^{\infty}k a_k r^k e^{ikt}\right)dt$$

$$= -\bar\lambda_0\varphi(r) + a_0\bar\lambda_0 + \bar a_0\lambda_0 + |\lambda_0|^2(i\pi - 2\log r)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_{-k}|^2}{k}r^{-2k} - \sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|^2 r^{2k},$$

其中用到

(18) $$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} t e^{ikt}dt = \begin{cases}\frac{1}{k}, & (k\neq 0),\\ i\pi, & (k=0).\end{cases}$$

类似地，由(13)式知(17)式的右端第二项为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\frac{1}{r}}\bar\psi\psi' d\zeta$$

$$= \bar\lambda_0\psi\left(\frac{1}{r}\right) - \beta_0\bar\lambda_0 - \bar\beta_0\lambda_0 + |\lambda_0|^2(-i\pi - 2\log r)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}r^{-2k}-\sum_{k=1}^{\infty}k|\beta_k|^2r^{2k}.$$

因此,(17)式便成为

$$\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2d\Omega$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(|\lambda_{-k}|^2+|\lambda_k|^2)r^{-2k}-\sum_{k=1}^{\infty}k(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2)r^{2k}$$
$$+2\mathrm{Re}[\lambda_0(\alpha_0-\beta_0)]-4|\lambda_0|^2\log r.$$

令 $r\to 1-0$, 即得恒等式

$$(19)\quad \frac{1}{\pi}\iint_F|h(w)|^2d\Omega$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(|\lambda_{-k}|^2+|\lambda_k|^2)-\sum_{k=1}^{\infty}k(|\alpha_k|^2+|\beta_k|^2)$$
$$+2\mathrm{Re}[\lambda_0(\alpha_0-\beta_0)],$$

其中 α_k, β_k 由(12)与(14)式给出. 由于积分非负, 并且仅当 area$F=0$ 时为零,从而得出定理结论.

若对 $i\neq l$, 取 $\lambda_i=0$, 便从定理 4.1 得到

$$(20)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}k|b_{kl}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}k|b_{-k,l}|^2\leqslant\frac{1}{|l|},$$
$$(l=\pm1,\ \pm2,\cdots),$$

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}k|b_{k0}|^2+\sum_{k=1}^{\infty}k|b_{-k,0}|^2\leqslant 2\mathrm{Re}b_{00}=2\log\frac{1}{|a|},$$

其中 $b_{00}=-\log a$ 系由(7)式给出.

推论 4.1 若 $\lambda_k\in\mathbf{C}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$, $\lambda_0\in\mathbf{R}$, 则

$$(22)\quad \mathrm{Re}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\lambda_k|^2+|\lambda_{-k}|^2)\geqslant 0,$$

只要第二个级数收敛.

注意实参数 λ_0 只在第一项中出现. 我们这里只得到关于实部的估计. 这是不同于经典的格隆斯基不等式的地方,若 $\lambda_0=0$, 则因 $\arg\lambda_k$ 的任意性可以导出关于绝对值的估计.

证 只需对 k 充分大时有 $\lambda_k=0$ 的情形证明(22)式就够了。此时式中的二重和可表为

$$q(\lambda_0)=\lambda_0^2\mathrm{Re}\,b_{00}+2\lambda_0\mathrm{Re}\left[\sum_{l\neq 0}b_{0l}\lambda_l\right]$$
$$+\mathrm{Re}\left[\sum_{k\neq 0}\sum_{l\neq 0}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right].$$

由(21)式推知，或者 $\mathrm{Re}\,b_{00}>0$，或者 $q(\lambda_0)$ 与 λ_0 无关。因此在 $-\infty<\lambda_0<+\infty$ 内 $q(\lambda_0)$ 有极小值。经微分即知取 λ_0 使得

$$\mathrm{Re}\sum_l b_{0l}\lambda_l=0$$

时 $q(\lambda_0)$ 达到最小值。对于如此选取的 λ_0，应用菲瓦尔兹不等式及(9)式便得

$$-q(\lambda_0)\leqslant-\mathrm{Re}\sum_{k\neq 0}\sum_l b_{kl}\lambda_k\lambda_l$$
$$\leqslant\left(\sum_{k\neq 0}\frac{|\lambda_k|^2}{|k|}\sum_{k\neq 0}|k|\left|\sum_l b_{kl}\lambda_l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sum_{k\neq 0}\frac{|\lambda_k|^2}{|k|}.$$

这就证明了推论 4.1.

由 3.1 节(12)与(8)式知 $b_{1k}=b_k$，$b_{-k,1}=a_k(k\geqslant 1)$。于是对 $l=1$，(20)式等价于

$$(23)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2\leqslant 1.$$

这一不等式也可直接由

$$\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{area}\,f(D)\leqslant\frac{1}{\pi}\,\mathrm{area}(C\setminus g(\Delta))$$
$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|^2$$

推出(见(1.2.2)式)。

从(21)式可得到一个涉及共形中心 b_0 的估计。

推论 4.2 若函数 $f(z)=a_1z+\cdots(z\in D)$ 和 $g(\zeta)=\zeta+b_0+\cdots(\zeta\in\Delta)$ 单叶且不相交，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leqslant \exp(-|b_1|^2). \tag{24}$$

证 由(7)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1} z^n = \frac{f(z)}{a_1 z} = \exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty} b_{0,-l} z^l\right).$$

故由引理 3.5(3.5 节)及(21)式得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1}|^2 \leqslant |a_1|^2 \exp\left(\sum_{l=1}^{\infty} l|b_{0,-l}|^2\right)$$

$$\leqslant \exp\left(-\sum_{l=1}^{\infty} l|b_{l,l}|^2\right) \leqslant \exp(-|b_0|^2).$$

珍肯斯 (1960b)给出了联系 $|a_1|$, $|b_0|$ 与 $|b_1|$ 的一些精确估计。见定理 8.19 及 8.7 节问题4。

问　　题

1. 证明定理 4.1 的逆： 若不等式(9)对一切 λ_k 都成立，则(1)的两函数单叶且不相交，

2. 设 $f(z) = a_1 z + \cdots$ 及 $g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \cdots (b_1 \geqslant 0)$ 单叶且不相交。试用推论 4.1 证明

$$|a_1| \leqslant \exp\left(-\frac{|b_0|^2}{1+b_1}\right) \text{ 及 } |a_1| \leqslant \exp\left(-\frac{(\operatorname{Im} b_0)^2}{1-b_1}\right).$$

3. 假设同 2。试证 (Nehari 1953)

$$\frac{|g'(\zeta)f'(z)|}{|g(\zeta)-f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{(1-|\zeta|^{-2})(1-|z|^2)}, \quad (z \in D, \ \zeta \in \Delta).$$

4. 设 $f(z) = az + \cdots (a>0)$ 在 D 内单叶。假设 $f(D)$ 不包含黎曼球面上直径两端的点对(参看 Jenkins 1965 和 Kühnau 1971a)，试证两函数 $af(z)$, $(z \in D)$ 和 $-af(-\zeta^{-1})$, $(\zeta \in \Delta)$ 不相交。同时导出对 $|z|<1$ 有

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{\sqrt{1-|z|^2}}, \quad \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}.$$

4.2 有界函数与比伯巴赫-艾伦伯格函数

1. 首先将上节的结果应用于**有界函数**。

设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在D内单叶且

(1) $$|f(z)|<1,\ (|z|<1).$$

记 $\bar{f}(z)=\overline{f(\bar{z})}$，我们定义 $f(z)$ 的格隆斯基型系数 $a_{kl}(k,l\geqslant 0)$ 与 $a^*_{kl}(k,l\geqslant 1)$ 为由如下两式确定的复数:

(2) $$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}z^k\zeta^l,$$
$$(|z|<1,\ |\zeta|<1);$$

(3) $$\log[1-f(z)\bar{f}(\zeta)]=-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a^*_{kl}z^k\zeta^l,$$
$$(|z|<1,\ |\zeta|<1).$$

我们看出 $a_{kl}=a_{lk}$ 为复对称型，而 $a^*_{kl}=\bar{a}^*_{lk}$为厄米特 (Hermit) 型。

函数

(4) $$\bar{a}_1f(z)=|a_1|^2z+\cdots(|z|<1),$$
$$\frac{\bar{a}_1}{f(\zeta^{-1})}=\zeta+\cdots\ (|\zeta|>1)$$

单叶且不相交。将(4.1.2)—(4.1.4)式与(2)式和(3)式比较，便知对于$k,l=1,2,\cdots$，有

(5) $$b_{kl}=-\bar{a}_{kl},\ b_{-k,l}=a^*_{kl},\ b_{-k,-l}=-a_{kl},$$
$$b_{k0}=\bar{a}_{k0},\ b_{-k,0}=-a_{k0},\ b_{00}=-2\log|a_1|.$$

若在推论 4.1 中分别以 $\bar{\lambda}_k$, $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_k$ 代替 λ_k, λ_0, $\lambda_{-k}(k\geqslant 1)$，便得到那哈利 (1953, 1969) 及谢菲尔和塔米 (Schiffer and Tammi 1969) 的如下结果:

定理 4.2 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在D内单叶且 $|f(z)|<1$. 若 $\lambda_k\in\mathbb{C}$ $(k=1,2,\cdots)$, $\lambda_0\in\mathbb{R}$，则

(6) $$\mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}\lambda_k\lambda_l\right]+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a^*_{kl}\lambda_k\bar{\lambda}_l$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}|\lambda_k|^2,$$

只要右端级数是收敛的。

我们给出两个应用．第一个应用类似于 3.2 节推论 3.3．

推论 4.3 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在 D 内单叶且 $|f(z)|<1$．若 $z_\nu\in D$，$\gamma_\nu\in\mathbb{R}$，$(\nu=1,2,\cdots,n)$，则

$$\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{a_1z_\mu\bar z_\nu}{f(z_\mu)\overline{f(z_\nu)}}\frac{f(z_\mu)-f(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\left(1-f(z_\mu)\overline{f(z_\nu)}\right)\right|^{\gamma_\mu\gamma_\nu}$$

$$\geqslant\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}|1-z_\mu\bar z_\nu|^{\gamma_\mu\gamma_\nu}$$

证 在定理 4.2 中，选取

$$\lambda_0=0,\quad \lambda_k=i\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu z_\nu^k.$$

再应用(2)式和(3)式便可推出结论．

推论 4.4 设 $f(z)=a_1z+a_2z^2+\cdots$ 在 D 内单叶，$|f(z)|<1$，则

(7)
$$|a_2|\leqslant 2|a_1|(1-|a_1|)\leqslant\frac{1}{2}.$$

进而若有 $e^{-1}\leqslant|a_1|\leqslant 1$，则

(8)
$$|a_3|\leqslant|a_1|(1-|a_1|^2).$$

证 由(2)式和(3)式知

(9)
$$a_{11}^*=|a_1|^2,\quad a_{00}=\log a_1,\quad a_{01}=\frac{a_2}{a_1},$$

$$a_{11}=\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

在定理 4.2 中令 $\lambda_0=\lambda$，$\lambda_1=e^{i\theta}$，其它 $\lambda_k=0$ 时就有

$$\lambda^2\log|a_1|+2\lambda\mathrm{Re}\left(\frac{a_2}{a_1}e^{i\theta}\right)+\mathrm{Re}\left[\left(\frac{a_3}{a_1}-\frac{a_2^2}{a_1^2}\right)e^{2i\theta}\right]$$
$$+|a_1|^2\leqslant 1.$$

取 $\theta=-\frac{1}{2}\arg\frac{a_3}{a_1}$，并记 $\frac{a_2}{a_1}e^{i\theta}=\alpha+i\beta$，上式成为

$$\left|\frac{a_3}{a_1}\right|\leqslant 1-|a_1|^2+\alpha^2-\beta^2-2\alpha\lambda+\lambda^2\log\frac{1}{|a_1|}\quad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

取 $\lambda = \dfrac{\alpha}{\log|a_1|^{-1}}$ 时最佳，这时有

$$(10)\qquad |a_3| \leqslant |a_1|(1 - |a_1|^2) + \alpha^2\left(1 - \frac{1}{\log|a_1|^{-1}}\right)|a_1|.$$

若 $e^{-1} \leqslant |a_1| \leqslant 1$，(10)式最后一项非正，从而得出(8)式。

对仍满足(1)式的奇函数

$$\sqrt{f(z^2)} = \sqrt{a_1}z + \frac{a_3}{2\sqrt{a_1}}z^3 + \cdots$$

应用(10)式(取 $\alpha = 0$)，便得到(7)式。

例 4.1 对于 $0 < p \leqslant 1$，以 $f(z) = az + \cdots (a > 0)$ 表示把 D 映照为 $D\backslash[-1, -p]$ 的映照函数，则有

$$(11)\qquad \frac{f(z)}{(1 - f(z))^2} = \frac{4p}{(1 + p)^2}\cdot\frac{z}{(1 - z)^2},$$

这是因为两端的函数均把 D 映照成沿负实轴从 $-\infty$ 到 $-\dfrac{p}{(1 + p)^2}$ 切开的平面，0 映照为 0 且在 0 点具有正导数。

由(11)式得到

$$f(z) = az + 2a(1 - a)z^2 + \cdots,\quad a = \frac{4p}{(1 + p)^2}.$$

故(7)式是最佳的。

再由函数

$$\sqrt[n]{f(z^n)} = a^{\frac{1}{n}}\left(z + \frac{2}{n}(1 - a)z^{n+1} + \cdots\right),$$

$$(n = 2, 3, \cdots),$$

把 D 映照成单位圆盘除去 n 条对称裂纹，如取 $n = 2$ 便知(8)式也是最佳的。

在整个范围 $0 \leqslant |a_1| \leqslant 1$ 中 $|a_3|$ 的精确界限是塔米(1953)得到的。参看 6.2 节问题 4。查尔缉斯基 (1953)，谢菲尔与塔米 (1965, 1968)，希尔维斯基 (Sierwierski, 1960) 等人给出了进一步的系数估计。

2. 如果函数

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots (|z| < 1)$$

在 D 内解析(不必单叶)且满足

$$f(z)f(\zeta) \neq 1, \; (|z| < 1, \; |\zeta| < 1), \tag{12}$$

则称 $f(z)$ 为比伯巴赫-艾伦伯格函数. 这类函数是满足 $|f(z)| < 1$ 的函数的推广. 容易看出, $f(z)$ 为比伯巴赫-艾伦伯格函数当且仅当两函数

$$\begin{aligned} a_1 f(z) &= a_1^2 z + \cdots \quad (z \in D), \\ \frac{a_1}{f(\zeta^{-1})} &= \zeta + \cdots \quad (\zeta \in \Delta) \end{aligned} \tag{13}$$

不相交.

我们用下式来定义数 $c_{kl}(k, l = 0, 1, \cdots)$:

$$\log \frac{f(z) - f(\zeta)}{(z - \zeta)[1 - f(z)f(\zeta)]} = -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} z^k \zeta^l \tag{14}$$

$$(|z| < 1, \; |\zeta| < 1).$$

特别有

$$\log \frac{f(z)}{a_1 z} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_{k0} z^k, \; (|z| < 1). \tag{15}$$

如以 $b_{kl}(k, l = 0, \pm 1, \cdots)$表示关于不相交对(13)的格隆斯基型系数, 则由(4.1.2)—(4.1.4)式推出

$$c_{kl} = b_{kl} - b_{-k,l} = b_{-k,-l} - b_{-k,l} \; (k, l = 1, 2, \cdots),$$

$$c_{k0} = -b_{k0} = -b_{-k,0}(k = 1, 2, \cdots), \; c_{00} = \frac{1}{2} b_{00} = -\log a_1.$$

若在定理 4.1 中分别以 $\lambda_k, \lambda_0, -\lambda_k$ 代替 $\lambda_{-k}, \lambda_0, \lambda_k (k = 1, 2, \cdots)$, 就得到珍肯斯(1965)及呼梅尔与谢菲尔(1969)的如下结果:

定理 4.3 设 $f(z)$ 是单叶的比伯巴赫-艾伦伯格函数, $\lambda_k (k = 0, 1, \cdots, m)$ 为不全为零的复数, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{l=0}^{m} c_{kl} \lambda_l \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} + 2\mathrm{Re}\left[\lambda_0 \sum_{l=0}^{m} c_{0l} \lambda_l\right], \tag{16}$$

并且等号成立当且仅当

(17) $$\operatorname{area}\left(\mathbb{C}\setminus\{f(z):z\in D\}\setminus\left\{\frac{1}{f(z)}:z\in D\right\}\right)=0.$$

当 $k\geqslant 1$ 时取 $\lambda_k=0$，从(16)式得到

(18) $$\sum_{k=1}^{\infty}k|c_{k0}|^2\leqslant 2\operatorname{Re}c_{00}=2\log\frac{1}{|a_1|}.$$

现再推导阿哈洛诺夫和那哈利的一个结果 (Aharonov 1970; Nehari 1970)：

推论 4.5 若 $f(z)=a_1z+\cdots$ 是单叶的比伯巴赫-艾伦伯格函数，则

(19) $$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\leqslant 1,$$

并因此而有

(20) $$|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{\sqrt{1-|z|^2}},\quad(|z|<1).$$

证 (15)式给出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_1}z^n=\frac{f(z)}{a_1z}=\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}c_{k0}z^k\right);$$

故由引理 3.5(3.5 节)及(18)式推出

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_{n+1}|^2\leqslant|a_1|^2\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}k|c_{k0}|^2\right)\leqslant 1,$$

这就证明了(19)式。因而再由薛瓦尔兹不等式，

$$|f(z)|^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\sum_{n=1}^{\infty}|z|^{2n}\leqslant\frac{|z|^2}{1-|z|^2},\quad(|z|<1).$$

例 4.2 函数

$$f(z)=\frac{z\sin\alpha}{1+iz\cos\alpha}\quad(0<\alpha<\pi)$$

在 D 内单叶并把 D 映照成过 $+1$ 和 -1 与实轴交成 α 角的圆周内部。它满足

$$f(i\cos\alpha)=i\cot\alpha=i\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}.$$

由此知(20)式是最佳的，因而(19)式也是最佳的。

问　　题

1.设 $f(z)$ 在 D 内单叶且 $|f(z)|<1$. 在二重无限序列的复希尔伯特空间中定义算子 $(z_k)\to(w_k)$ 其中

$$w_k=\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{kl}\,(a_{kl}z_l+a_{kl}^{*}z_{-l}),\quad w_{-k}=\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{kl}\,(\overline{a_{kl}^{*}}z_l+\overline{a_{kl}}z_{-l}),$$

$k=1,2,\cdots$. 试证明这一算子是范数 $\leqslant 1$ 的有界算子；并且当 $\operatorname{area}(D\setminus f(D))=0$ 时为酉算子 (Hummel 1972c).

2.设 $f(z)=z+a_m z^m+a_{m+1}z^{m+1}+\cdots$ 在 D 内单叶且 $|f(z)|<1$. 试证明下面的精确估计式：

$$|a_{n}|\leqslant\frac{2|a_1|}{2n-1}(1-|a_1|^{2n-1}),\ (n<m).$$

(Schiffer and Tammi 1968).

3.试证明每个比伯巴赫-艾伦伯格函数为有界，但其上确界可以任意大.

4.设 $f(z)$ 是单叶的比伯巴赫-艾伦伯格函数. 试利用(3.5.9)式证明

$$|a_n|<e^{-\frac{C}{\pi}}(n-1)^{-\frac{1}{2}},\quad (n=2,3,\cdots),$$

并证明这一估计式除去可能相差一个常数外是最佳的 (Aharonov 1970; Nehari 1970).

5.证明：每个比伯巴赫-艾伦伯格函数必从属于一个单叶的比伯巴赫-艾伦伯格函数.

6.证明每个比伯巴赫-艾伦伯格函数都满足(19)式从而有精确的估计：$|a_n|\leqslant 1$, $(n=1,2,\cdots)$ (Lebedev and Milin 1951)

4.3 格拉贝定-谢菲尔不等式

1. 现将格隆斯基不等式推广到有若干不取值情形(Garabedian and Schiffer 1967).

如同 3.1 节推导格隆斯基不等式那样，我们从一些形式关系式着手. 设 $g(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\cdots$ ($|\zeta|$ 充分大)，u，v 为二

相异复数，$w\in\mathbf{C}$。令

$$(1)\qquad \tilde{g}(\zeta)=\sqrt{\frac{g(\zeta)-u}{g(\zeta)-v}}=1+\frac{v-u}{2}\zeta^{-1}+\cdots,$$

$$\tilde{w}=\sqrt{\frac{w-u}{w-v}},$$

且由母函数

$$(2)\qquad \log\frac{\tilde{w}+\tilde{g}(\zeta)}{\tilde{w}-\tilde{g}(\zeta)}=\Psi_0(w)$$

$$+\sqrt{(w-u)(w-v)}\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(w)\frac{\zeta^{-k}}{k}\quad(|\zeta|\text{充分大})$$

定义函数 $\Psi_k(w)$，$(k=0,1,\cdots)$。

令 $\zeta\to\infty$，我们由(1)式得出

$$(3)\qquad \Psi_0(w)=\log\frac{\tilde{w}+1}{\tilde{w}-1}=2\log(\sqrt{w-u}+\sqrt{w-v})$$

$$-\log(v-u)。$$

因为

$$(4)\qquad \tilde{g}'(\zeta)=\frac{u-v}{2}g'(\zeta)(g(\zeta)-u)^{-\frac{1}{2}}(g(\zeta)-v)^{-\frac{3}{2}},$$

则由(2)式两边关于 ζ 微分得到

$$(5)\qquad \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)-w}\frac{1}{\sqrt{(g(\zeta)-u)(g(\zeta)-v)}}=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(w)\zeta^{-k-1}.$$

我们推知 $\Psi_k(w)(k=1,2,\cdots)$ 是 $k-1$ 次多项式，特别求得

$$(6)\qquad \Psi_1(w)\equiv 1,\ \Psi_2(w)=w+\frac{u+v}{2}-2b_1.$$

现在引入格拉贝定-谢非尔系数

$$(7)\qquad c_{kl}=c_{kl}(u,v),\ (k,l=0,1,\cdots),$$

它由母函数

$$(8)\qquad \log\frac{\tilde{g}(z)-\tilde{g}(\zeta)}{(z^{-1}-\zeta^{-1})(\tilde{g}(z)+\tilde{g}(\zeta))}=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}c_{kl}\zeta^{-k}z^{-l},$$

$$(|z|,\ |\zeta|\text{充分大})$$

来定义．显然有

(9) $$c_{kl}=c_{lk},\ (k,l=0,1,\cdots).$$

不难证明，当 $v\to u$ 时对 $k,l=1,2,\cdots$，$c_{kl}(u,v)$ 收敛于格隆斯基系数 b_{kl}。

若将 $w=g(z)$ 代入(2)式，对充分大的 z,ζ，$|z|<|\zeta|$，与(5)式比较 ζ^{-k} 的项，便得到

(10) $$\Psi_0(g(z))=\log z+\sum_{l=0}^{\infty}c_{0l}z^{-l},$$

并且有

(11) $$\sqrt{(g(z)-u)(g(z)-v)}\,\Psi_k(g(z))=z^k+k\sum_{l=0}^{\infty}c_{kl}z^{-l},$$

$$(k=1,2,\cdots).$$

因 $\Psi_1(w)\equiv 1$，故特别有

(12) $$\sqrt{(g(z)-u)(g(z)-v)}=z+\sum_{l=0}^{\infty}c_{1l}z^{-l}.$$

从(3)式和(10)式我们求得

(13) $$c_{00}=\log\frac{4}{v-u},\ c_{01}=b_0-\frac{u+v}{2},$$
$$c_{02}=b_1-\frac{1}{16}(u-v)^2-\frac{1}{8}(u+v-2b_0)^2.$$

再从(12)式与(11)式($k=2$)经过一些计算得到：

(14) $$c_{11}=b_1-\frac{1}{8}(u-v)^2,$$
$$c_{12}=b_2-\frac{1}{16}(u-v)^2(u+v-2b_0),$$
$$c_{22}=b_3+\frac{1}{2}b_1^2-\frac{1}{256}(u-v)^4$$
$$-\frac{1}{32}(u-v)^2(u+v-2b_0)^2.$$

本节所讨论的函数同上一节所考虑的比伯巴赫-艾伦伯格函数有着十分密切的联系。

设 $g\in\Sigma$, u, $v\bar{\in} g(\Delta)$. 则由(1)式定义的函数 $\tilde{g}(\zeta)$在$\triangle$内解析单叶且当 ζ_1, $\zeta_2\in\Delta$时, $\tilde{g}(\zeta_1)\neq-\tilde{g}(\zeta_2)$, 从而推知函数

(15) $$f(z)=\frac{\tilde{g}(z^{-1})-1}{\tilde{g}(z^{-1})+1}=\frac{v-u}{4}z+\cdots,\ (z\in D)$$

在D内解析单叶,并且满足

(16) $$f(z_1)f(z_2)\neq 1,\quad (z_1,\ z_2\in D),$$

故 $f(z)$ 为比伯巴赫-艾伦伯格函数.

反之，设 $f(z)$ 为单叶的比伯巴赫-艾伦伯格函数. 则逆推如上计算便得到

$$g(\zeta)=\frac{v-u}{4}\left(\frac{1}{f(\zeta^{-1})}+f(\zeta^{-1})\right)+\frac{v+u}{2}=\zeta+\cdots,$$
$$(\zeta\in\Delta).$$

从而由(16)式推出 $g\in\Sigma$; 且当 $\zeta\in\Delta$, $g(\zeta)\neq u,v$.

可以验证,对于由(15)式给定的函数 $f(z)$,定义(8)与(4.2.14)式等价. 因此, 定理 4.3 就等价于如下结果 (Nehari 1969; Pommerenke 1969a):

定理 4.4 设 $g\in\Sigma$, u, $v\in E=\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$. 若 $\lambda_0,\cdots,\lambda_m$ ($m=1,2,\cdots$) 是不全为零的复数，则

(17) $$\sum_{k=1}^{\infty}k\left|\sum_{l=0}^{m}c_{kl}\lambda_l\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}+2\mathrm{Re}\left[\lambda_0\sum_{l=0}^{m}c_{0l}\lambda_l\right],$$

并且等号成立当且仅当 area $E=0$.

因由(1)式及(15)式,有

$$w\bar{\in} g(\Delta)\Longleftrightarrow\pm\tilde{w}\bar{\in}\tilde{g}(\Delta)\Longleftrightarrow\left(\frac{\tilde{w}-1}{\tilde{w}+1}\right)^{\pm1}\bar{\in} f(D),$$

所以定理 4.3 与 4.4 中等号成立的情形互相对应.

我们来考虑定理 4.4 的几个推论.

若选取当 $j\neq l$ 时 $\lambda_j=0$,便得到

(18) $$\sum_{k=1}^{\infty}k|c_{kl}|^2\leqslant\frac{1}{l},\ (l=1,2\cdots),$$

(19) $$\sum_{k=1}^{\infty} k|c_{k0}|^2 \leqslant 2\mathrm{Re}\, c_{00} = 2\log\frac{4}{|v-u|}.$$

特别，我们再次得到当 $u, v \in E$ 时 $|u-v| \leqslant 4$（比较定理1.4）；并且，

(20) $$|c_{kl}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{kl}}, \quad |c_{k0}| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}}\sqrt{\log\frac{4}{|v-u|}}$$
$$(k, l = 1, 2, \cdots).$$

反之，假设对于所有的 λ_k，(17)式成立，则由(20)式可推出二重幂级数(8)在 $\{|z|>1, |\zeta|>1\}$ 内收敛，因此 $\tilde{g}(z)$ 在 $\triangle$ 内解析并且当 $z \neq \zeta$，$\tilde{g}(z) \neq \tilde{g}(\zeta)$，这就意味着 $g \in \Sigma$ 且 $u, v \in E$。

推论 4.6 设 $g \in \Sigma$，$u, v \in E$。若 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{C}$，则

$$\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{kl}\lambda_k\lambda_l + \sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k} \geqslant 0.$$

这一不等式是格拉贝定和谢菲尔(1967)得到的，它是格隆斯基不等式的推广（后者是 $\lambda_0 = 0$，$u \to v$ 的极限情形）。

证 仿照推论 4.1 的证明，我们将二重和式写成

$$\lambda_0^2 \mathrm{Re}\, c_{00} + 2\lambda_0 \sum_{k=1}^{m} c_{k0}\lambda_k + \mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_{kl}\lambda_k\lambda_l\right].$$

故若

$$\mathrm{Re}\left[c_{00}\lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} c_{k0}\lambda_k\right] = 0,$$

作为 λ_0 的函数它达到最小值。于是由薛瓦尔兹不等式及(17)式推知在此情况下有

$$-\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{kl}\lambda_k\lambda_l = -\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=0}^{m} c_{kl}\lambda_l\right)\lambda_k$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\sum_{k=1}^{m} k\left|\sum_{l=0}^{m} c_{kl}\lambda_l\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}.$$

2. 现在我们考虑当值 u 和 v 有一个或两个都属于 $g(\Delta)$ 的这一更困难的情形。称数 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ 的集为容许的，如果有理函数

$$(21) \qquad q(z) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k z^k + \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \bar{\lambda}_k z^{-k}$$

的所有零点都在 $|z|=1$ 上。如果 $\lambda_m \neq 0$，这一条件成立当且仅当实三角多项式

$$(22) \qquad q(e^{i\theta}) = \lambda_0 + 2\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re}[\lambda_k e^{ik\theta}]$$

有 $2m$ 个实零点(可以重合)。

定理 4.6 设 $\lambda_0 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{C}\ (m=1,2,\cdots)$ 是容许的，$c_{kl}(u,v)\,(u,v \in \mathbb{C}, u \neq v)$ 是 $g \in \Sigma$ 的格拉贝定-谢非尔系数，令

$$(23) \qquad p(u,v) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} c_{kl}(u,v)\lambda_k\lambda_l + \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k}.$$

如果

$$(24) \qquad u \in E \quad 或者 \quad \frac{\partial}{\partial u} p(u,v) = 0,$$

并且

$$(25) \qquad v \in E \quad 或者 \quad \frac{\partial}{\partial v} p(u,v) = 0,$$

则

$$(26) \qquad \operatorname{Re} p(u,v) \geq 0.$$

不等式(26)称为格拉贝定-谢非尔不等式。格拉贝定与谢非尔(1967)用变分方法(见 7.3 节)对 $v \in E$ 的情形给了证明。也可参看 Schiffer and Schmidt 1971. $u \in E$，$v \in E$ 的情形则在推论 4.6 中已包含，在此情形下，容许条件就是多余的了。关于等号成立的情形在本节末尾讨论。

作为定理证明前的准备，我们利用解析的格林公式先证明一个恒等式(其中并没有用到条件(21),(24)和(25))。

设 $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{C}$, 定义

(27) $$h(w) = \lambda_0 \varpi_0(w) + \sqrt{(w-u)(w-v)} \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \varpi_k(w).$$

由(3)式推出

(28) $$h'(w) = \frac{\varpi(w)}{\sqrt{(w-u)(w-v)}}.$$

其中 $\varpi(w)$ 表示多项式

(29) $$\varpi(w) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \left[\left(w - \frac{u+v}{2}\right)\varpi_k(w) + (w-u)(w-v)\varpi_k'(w)\right].$$

从(10)式和(11)式推知,当 $|z|$ 充分大时有

(30) $$\varphi(z) = h[g(z)] = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k + \lambda_0 \log z + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k},$$

其中,

(31) $$d_k = \sum_{l=0}^{m} c_{kl} \lambda_l.$$

再引入函数

(32) $$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k + \lambda_0 \log z - \sum_{k=1}^{m} \frac{\bar{\lambda}_k}{k} z^{-k}.$$

由(21)式有 $z\psi'(z) = q(z)$.

引理 4.1 设 $g \in \Sigma$, $u \in g(\Delta)$, $v \in \mathbf{C}$, 则

(33) $$\begin{aligned}\operatorname{Re} P(u,v) = & \frac{1}{2\pi} \iint_{|z|>1} |\varphi'(z) - \psi'(z)|^2 d\Omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{E} |h'(w)|^2 d\Omega + \sum_{j} \frac{1}{\pi} \int_{A_j} \{\operatorname{Re}[\psi(z)] \\ & \operatorname{Im}[\varphi'(z) dz] - \operatorname{Im}[\varphi(z) - \varphi(z_j)] \operatorname{Re}[\psi'(z) dz]\},\end{aligned}$$

其中 A_1, A_2 分别是从 $z_1 = g^{-1}(u)$ 到 ∂D 和从 ∂D 到 $z_2 = g^{-1}(v)$

的互不相交的半开逐段光滑若当弧；右端第三部分的线积分假定都是存在的，被积函数的值定义为其左极限；如果 $v\in g(\Delta)$ 时则删去第二个线积分。

这个恒等式的重要特征是两个面积分均非负。为完成定理4.5的证明，我们即将证明：适当选取 A_1 和 A_2 可使线积分为零；这时就要用到条件(21)，(24)和(25)。

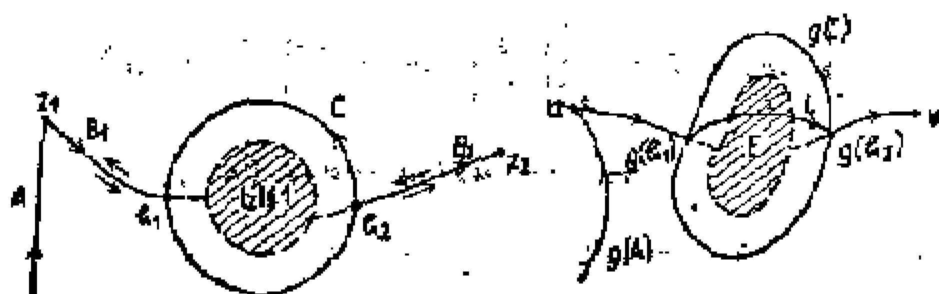


图4.2 （曲线 C^* 为箭头所示）

证 (a)设 $j=1,2$，取 r 满足 $1<r<|z_j|$，$C=\{|z|=r\}$；以 ζ_j 表示 A_j 和 C 的第一个交点，以 B_j 表示 A_j 上从 z_j 到 ζ_j 之间的逐段光滑子弧。令

$$F=\{|z|>r\}\setminus(B_1\cup B_2)\subset\bar{\mathbb{C}},\tag{34}$$

并以 A 表示 F 内从 ∞ 到 z_1 的一段弧。再以 H 表示若当曲线 $g(C)$ 的内区域，并设 L 是 H 内从 $g(\zeta_1)$ 到 $g(\zeta_2)$ 的光滑若当弧(见图4.2)。

如果 $v\in E$ 即 $v\in g(\Delta)$ 时，则 $j=1$，这时 L 就是从 $g(\zeta_1)$ 到 v 的弧。我们约定：在下面的论证中，假如 $v\in E$ 的话，就不去理会有关 z_2(及 B_2 从而 $g(\zeta_2)$)的那些内容。

$L^*=g(B_1)\cup L\cup g(B_2)$ 是从 u 到 v 的一段若当弧。由(27)式定义的函数 $h(w)$ 在 $\mathbb{C}\setminus(L^*\cup g(A))$ 内(单值)解析。在裂纹 $L^*\cup g(A)$ 上，$h(w)$ 之值定义为其左极限。鉴于(3)式，我们可以确定对数使 $h(v)=\log\varphi_1(v)=0$。于是由(28)式推知在 L^* 上右极限为 $-h(w)$。

由(30)与(32)式定义的函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在单连通区域 $F\setminus A$ 内解析。由于裂纹上的值由左极限给出，故右极限分别为

$$\begin{array}{lll} \text{在}A\text{上，} & \varphi(z)-2\pi i\lambda_0 & \text{和 } \phi(z)-2\pi i\lambda_0, \\ \text{在}B_1\text{上，} & -\varphi(z) & \text{和 } \phi(z)-2\pi i\lambda_0, \\ \text{在}B_2\text{上，} & -\varphi(z) & \text{和 } \phi(z). \end{array} \tag{35}$$

从而得到

$$\varphi(z_1)=i\pi\lambda_0,\quad \varphi(z_2)=0. \tag{36}$$

(h) 由(30)与(32)式，函数 $\phi(z)-\varphi(z)$ 在由(34)式定义的区域 F 内解析. F 的正向边界曲线记为 C^*（见图 4.2），它由 B_1, B_2, $-B_1$, $-B_2$ 及 C 的两段弧组成. 根据(35)知 $\phi(z)-\varphi(z)$ 的右极限为

$$\begin{array}{ll} \text{在 } B_1\text{ 上，} & \phi(z)+\varphi(z)-2\pi i\lambda_0, \\ \text{在 } B_2\text{ 上，} & \phi(z)+\varphi(z). \end{array} \tag{37}$$

应用定理 1.2(1.1 节) 于由 $\{|z|=\rho\}$（ρ 充分大），一条趋近于 C^* 的曲线以及 A 的取两个方向的一段弧所组成的曲线. 取极限容易得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\iint_{|z|>r}|\phi'(z)-\varphi'(z)|^2 d\Omega \\ &=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}(\phi'-\varphi')(\bar\phi-\bar\varphi)dz \\ &=-\frac{1}{2\pi i}\int_C \phi'\bar\phi dz+\frac{1}{2\pi i}\int_C \phi'\bar\varphi(+\varphi'\bar\phi)dz \\ &\quad-\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi'\bar\varphi dz-\frac{2}{2\pi i}\int_{B_1\cup B_2}(\varphi'\bar\phi+\phi'\bar\varphi)dz \\ &\quad-\lambda_0\int_{B_1}(\phi'+\varphi')dz, \end{aligned} \tag{38}$$

其中我们利用了(37)式把 B_1 和 B_2 两边所得的值合并在一起.

我们还将定理 1.2 应用于在 $H\backslash L$ 内解析的函数 $h(w)$. 由于 $h(w)$ 在越过 L 时只是改变符号，由 $\varphi(z)=h(g(z))$ 而易得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\iint_H |h'(w)|^2 d_w\Omega &= \frac{1}{2\pi i}\int_{g(C)} h'(w)\overline{h(w)}dw \\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi'(z)\overline{\varphi(z)}dz. \end{aligned} \tag{39}$$

(c) 仍以 C^* 表示 F 的正向边界. (30), (32) 式及留数定理表明:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\left\{\left[\phi'(z)+\frac{\lambda_0}{z}\right][\varphi(z)-\lambda_0\log z]-\left[\varphi'(z)+\frac{\lambda_0}{z}\right]\right.$$

$$\left.\times[\phi(z)-\lambda_0\log z]\right\}dz=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k d_k+2\lambda_0 d_*$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k\bar{\lambda}_k}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k\bar{\lambda}_k}{k}+\sum_{k=1}^{m}d_k\lambda_k.$$

对照(23)式及(31)式知上述表达式等于 $2p(u,v)$. 经整理, 我们得知

$$2p(u,v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\left\{\lambda_0\frac{d}{dz}[(\varphi-\phi)\log z]\right.$$
$$\left.+(\phi'\varphi-\varphi'\phi)\right\}dz. \tag{40}$$

先直接积出第一项. 第二项利用(35)式把 B_1 和 B_2 两边所得的值合在一起因而有

$$2p(u,v)=\lambda_0(\varphi(z_1)-\phi(z_1))+\frac{1}{2\pi i}\int_C(\phi'\varphi-\varphi'\phi)dz$$
$$-\frac{2}{2\pi i}\int_{B_1\cup B_2}(\phi'\varphi-\varphi'\phi)dz-\lambda_0\int_{B_1}\varphi'dz. \tag{41}$$

从(41)式减去(38)与(39)式便得

$$2p(u,v)-\frac{1}{\pi}\iint_{|z|>r}|\phi'-\varphi'|^2d\Omega-\frac{1}{\pi}\iint_{H}|h'(w)|^2d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C[\psi'(\varphi-\bar{\varphi})-\bar{\varphi}'(\phi+\bar{\phi})]dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_C\phi'\bar{\phi}dz-\frac{2}{2\pi i}\int_{B_1\cup B_2}[\phi'(\varphi-\bar{\varphi})$$

$$-\varphi'(\phi+\bar{\phi})]\,dz+2\lambda_0\int_{B_1}\phi'dz$$

$$+\lambda_0[\varphi(z_1)-\phi(\zeta_1)].$$

上式取实部并利用(36)式: $\varphi(z_1)=i\pi\lambda_0$, $\varphi(z_2)=0$, 便得到

$$(42)\quad 2\mathrm{Re}p(u,v)-\frac{1}{\pi}\iint_{|z|>r}|\psi'(z)-\varphi'(z)|^2dQ$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{H(r)}|h'(w)|^2dQ$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{|z|=r}\{\mathrm{Im}\varphi\mathrm{Re}(\psi'dz)-\mathrm{Re}\psi\mathrm{Im}(\varphi'dz)\}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r}\mathrm{Im}(\psi'\bar{\psi}dz)-\sum_j\frac{2}{\pi}\int_{B_j(r)}\{\mathrm{Im}[\varphi(z)$$

$$-\varphi(z_j)]\mathrm{Re}[\psi'dz]-\mathrm{Re}\psi\mathrm{Im}[\varphi'dz]\}-\lambda_0\mathrm{Re}\psi(\zeta_1).$$

我们写成 $H(r)$ 等以强调与 r 有关.

(d) 最后令 $r\to1+0$. 由面积定理不难推出 (例如参看(9.2.4)式)

$$(r-1)|g'(z)|\to0,(|z|=r\to1).$$

如果 $v\in E$,则将这结果应用于 $(g(z^2)-v)^{\frac{1}{2}}$ 亦得

$$(r-1)|g'(z)||g(z)-v|^{-\frac{1}{2}}\to0,\ (|z|\to1).$$

所以不论哪一种情形,都可以从(30)与(28)式推知

$$(43)\qquad (r-1)|\varphi'(z)|\to0,\quad (|z|=r\to1).$$

由于当 $|z|=1$ 时有 $\mathrm{Re}\psi(z)=0$, 故

$$\mathrm{Re}\psi(z)=O(r-1),\quad \mathrm{Re}[\psi'(z)dz]=O(r-1)|dz|,$$
$$(|z|=r\to1).$$

于是在(42)中当 $r\to1+0$ 时,右端前两个积分由(43)式它们都趋于零, 其余几个线积分由假设是收敛的。从而便得到结论(33)式。

3. 我们还需要推出几个形式关系式。

定义格拉贝定-谢菲尔系数的(8)式关于 u 微分, 并经过一些计算,便可得到

$$(44)\quad [(v-u)\tilde{g}(\zeta)\tilde{g}(z)]^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial u}c_{kl}(u,v)\zeta^{-k}z^{-l}.$$

若考虑(2)式关于 $\tilde{\omega}$ 的展开式的一次项系数,便知

$$(45)\qquad \tilde{g}(\zeta)^{-1}=1-\frac{v-u}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\varphi_k(u)\zeta^{-k}.$$

此式同(44)式比较得出 $\frac{\partial}{\partial u}c_{00}(u,v)=\frac{1}{v-u}$，且对 $k=1,2,\cdots$，有

$$\text{(46)}\quad \frac{\partial}{\partial u}c_{kl}(u,v)=\begin{cases}\frac{(v-u)\varphi_k(u)\varphi_l(v)}{4kl} & (l=1,2,\cdots),\\ -\frac{\varphi_k(u)}{2k} & (l=0).\end{cases}$$

设$\varphi(w)$是由(29)式定义的多项式，则有

$$\text{(47)}\qquad \varphi(u)=\lambda_0-\frac{v-u}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\varphi_k(u),$$

于是由(23)式与(46)式便推出

$$\text{(48)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}p(u,v)=\frac{1}{v-u}\varphi(u)^2.$$

定理 4.5 的证明 不妨设 $\lambda_m\neq0$，$u\notin E$；因 $u\in E$，$v\in E$ 的情形已包含在推论 4.6 中。

(a) 先设 $\lambda_0\neq0$。由(27)与(3)式有

$$\exp\frac{h(w)-h(u)}{\lambda_0}=\frac{(\sqrt{w-u}+\sqrt{w-v})^2}{u-v}$$

$$\cdot\exp\left[\sqrt{(w-u)(w-v)}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k\lambda_0}\varphi_k(w)\right].$$

这一函数恰有两个互为倒数的分支。因此，

$$\text{(49)}\quad f(w)=\exp\left(\frac{h(w)-h(u)}{\lambda_0}\right)+\exp\left(-\frac{h(w)-h(u)}{\lambda_0}\right)-2$$

是整函数。由条件(24)及(48)式表明 $\varphi(u)=0$。因此，由(28)式得知，当 w 沿径向趋于 u 时，

$$h(w)-h(u)=O((w-u)^{\frac{3}{2}}),$$

并从而由(49)推知 $f(w)$ 以 u 为其 $p\geq3$ 阶零点。

我们断定，恰有 $2p$ 条从 u 出发的解析弧包含于 U。这里

$$U=\{w\in\mathbb{C};\operatorname{Im}f(w)=0\},$$

因 $f(w)$ 是整函数，最大值原理表明 U 不包含任何闭若当曲线，因此在 U 内可找到 $2p$ 条从 u 到∞的互不相交的若当弧。

因 $e^t+e^{-t}-2=t^2+\cdots$ 为具有实系数的偶函数，故 U 内那 $2p$ 条弧中有 p 条满足

(50) $$\operatorname{Im}[h(w)-h(u)]=0.$$

取这些弧中的三条 U_1, U_2, U_3，并定义 $U^*=U_1\cup U_2\cup U_3$。

若 $\lambda_0=0$，则考虑 $f(w)=h(w)^2$ 也可找到具有同样性质的三条弧。

若 $v\in E$ 时，亦可以构造从 v 到∞的互不相交的若当弧 $V_j(j=1,2,3)$，使得沿着 V_j，有 $\operatorname{Im}[h(w)-h(v)]=0$。设 $V^*=V_1\cup V_2\cup V_3$，则总可选择弧 U_j 和 V_j 使得或者 $U^*\cap V^*=\varnothing$，或者 $v\in U^*$，$u\in V^*$。

(b) 由(32)式，因λ_0是实数，故函数 $\operatorname{Re}\phi(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 内单值。由容许条件，函数 $q(z)=z\phi'(z)$在 $\partial\Delta=\{|z|=1\}$ 上有 $2m$ 个零点。设 ζ_ν是 $q(z)$的 p_ν重零点 ($\nu=1,2,\cdots,n$; $p_1+\cdots+p_n=2m$)。则恰有 $2p_\nu+2$ 条从 ζ_ν 出发的解析弧而沿着这些弧 $\operatorname{Re}\phi(z)=0$。因当 $z\in\partial\Delta$ 有 $\operatorname{Re}\phi(z)=0$，故由对称性知这些弧中有 p_ν 条进入 Δ。总共有 $p_1+\cdots+p_n=2m$ 条这样的弧，它们伸向∞，在Δ内互不相交，因若不然则存在一条有界闭若当曲线使得沿该曲线 $\operatorname{Re}\phi(z)=0$，而由最大值原理这是不可能的。

若 B 表示这 $2m$ 条若当弧的并，则 $\Delta\backslash B$ 由$2m$个区域 $F_k(k=1,\cdots,2m)$组成。因 $\phi(z)=m^{-1}\lambda_m z^m+\cdots(\lambda_m\neq 0)$，这些弧以诸方向角

$$-\frac{1}{m}\arg\lambda_m+\frac{\pi\mu}{m},\quad(\mu=1,\cdots,2m)$$

之一终于∞。由于 $\partial\psi(F_k)$ 位于虚轴上，故单连通区域 $\phi(F_k)$必包含半平面，因而 F_k 在∞的角不能为零，于是 ∂F_k 的两条边界弧在∞成 π/m 角。

(c) 现在来证明

(51) $$(E\cup g(B))\cap U^*\neq\varnothing.$$

假定此式为谬，则 U^* 位于某个区域 $g(F_k)$ 中，且 $E\cup g(B)$ 在 $\mathbb{C}\setminus U^*$ 的三分集 G_1，G_2，G_3 之一内，设

(52)　　$$U^*\subset g(F_1),\ E\cup g(B)\subset G_1,$$

则 $G_2\cup G_3\subset G(F_1)$。我们分两种情形讨论：

(i) 先假定 $v\notin G_2\cup G_3$，则 $h(w)$ 在 G_2 和 G_3 内都单值。因 $\Psi_k(w)=w^{k-1}+\cdots$，故由(27)式

$$h(w)=\frac{1}{m}\lambda_m w^m+\cdots,\quad (w\in G_j,|w|\text{充分大}).$$

(50)式表明 $h(G_j)$ 含有半平面，则对每个 $\varepsilon>0$，$G_j(j=2,3)$ 包含有角度为 $\frac{\pi}{m}-\varepsilon$ 的扇形。这是不可能的，因为 $G_2\cup G_3\subset g(F_1)$ 并且 $g(F_1)$ 在∞的角度为 $\frac{\pi}{m}$。

(ii) 再假定 $v\in G_2$，则由(52)，$v\notin E$，因 $v\notin U^*$，故 $U^*\cap V^*=\varnothing$。因此 U^* 位于 $\mathbb{C}\setminus V^*$ 的三分集之一中，另外两个分集在 G_1 内，从而在 $g(F_1)$ 内。于是类似于(i)可由比较角度推知是不可能的。

于是我们证明了(51)。因而可找到一条从 $z_1=g^{-1}(u)$ 到 $\partial\Delta$ 的半开若当弧 $A_1\subset g^{-1}(U^*)\cap B$（见图 4.3）。从(50)及(b)推知 A_1 由一些子弧组成，沿着这些子弧或者 $\operatorname{Im}[\varphi(z)-\varphi(z_1)]=0$，或者 $\operatorname{Re}\psi(z)=0$，故(33)式的第一个线积分为零。

若 $v\in E$，可用类似方式构造一条从 $\partial\Delta$ 到 $z_2=g^{-1}(v)$ 的弧 A_2 使(33)式的第二个线积分为零。若 A_1 与 A_2 部分重合，则可将其中的一条用一条与之相近而不与另一条相交的弧代替然后取极限。这样，就由引理 4.1 推出

(53)　　$$\operatorname{Re}p(u,v)=\frac{1}{2\pi}\iint_{|z|>1}|\varphi'(z)-\psi'(z)|^2 d\Omega + \frac{1}{2\pi}\iint_{E}|h'(w)|^2\geqslant 0.$$

4. 最后讨论等号成立的情形。

为了表明与第八章内容的联系，我们将这里的讨论结果用二

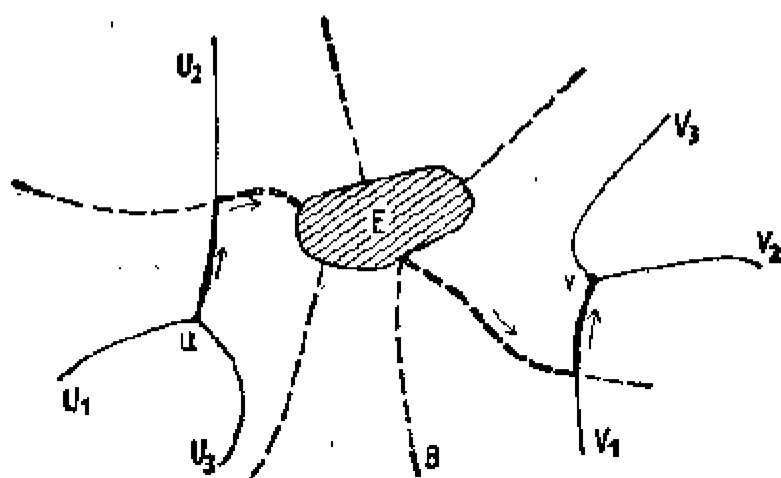


图 4.3

次微分 $Q(z)dz^2$ 及其轨线 $Q(z)dz^2>0$ 表达之. 事实上，在最后的证明中所考虑的那些曲线就是某些二次微分的轨线. 当然，从另一方面说，我们也完全可以避开二次微分.

定理 4.6 假定满足定理 4.5 的假设条件，则 $\mathrm{Re}\,p(u,v)=0$ 成立当且仅当 $u,v\in E$ 并且 E 由二次微分

$$(54)\qquad -h'(w)^2dw^2=-\frac{\varphi(w)^2}{(w-u)(w-v)}dw^2$$

的有限多条轨线弧组成.

若 $u,v\in E$，则 $\mathrm{Re}\,h(w)$ 在 $\mathbb{C}\setminus E$ 内单值且 $\mathrm{Re}\,h(v)=0$，所以关于(54)的轨线条件可表示为

$$(55)\qquad \mathrm{Re}\,h(w)=0,\ (w\in E).$$

一般地，这个定理并不表明格拉贝定-谢菲尔不等式(26)是最佳的. 事实上，(27)式定义的函数 $h(w)$ 包含多项式 $\varphi_1(w),\cdots,\varphi_m(w)$. 不难证明，这些多项式同函数 g 的系数 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-2}$ 有关，并且不知道是否存在函数 $g\in\Sigma$ 具有指定的这前几项系数并把 Δ 映照成以(54)的轨线弧为界的区域. 因此我们并不知道是否能够有函数满足我们的关于等号成立的条件. 不过，用变分方法所作的一个证明还是可以表明(26)式是精确的.

证 (a) 先假定上述条件满足. 因 $u,v\in E$，故由(55)及反射

原理知函数 $\mathrm{Re}\varphi(z)=\mathrm{Re}h(g(z))$在$\Delta$内单值且对于 $|z|=1$ 满足 $\mathrm{Re}\varphi(z)=0$. 由(30)与(32)式得

$$(56)\quad \varphi(z)-\psi(z)=d_0+\sum_{k=1}^{m}\left(d_k+\frac{\lambda_k}{k}\right)z^{-k}+\sum_{k=m+1}^{\infty}d_kz^{-k}.$$

又因当 $|z|=1$ 时 $\mathrm{Re}\psi(z)=0$, 由最小值原理知 $\varphi(z)-\psi(z)\equiv d_0$ 且 $\mathrm{Re}d_0=0$. 于是从(56)式推出

$$(57)\qquad d_k=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_k}{k}, & (1\leqslant k\leqslant m),\\ 0, & (k>m).\end{cases}$$

因此由(23)与(31)式得

$$(58)\qquad p(u,v)=d_0\lambda_0+\sum_{k=1}^{m}d_k\lambda_k+\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}=d_0\lambda_0.$$

因 λ_0 为实数而有 $\mathrm{Re}p(u,v)=0$.

(b) 反之，假设 $\mathrm{Re}p(u,v)=0$. 先证 $u,v\in E$. 若不然，可假定 $u\in g(\Delta)$, 则(53)式表明 $\varphi'(z)\equiv\psi'(z)$. 但这是不可能的，因为由(28)式，$\varphi'(z)=h'(g(z))g'(z)$ 以 $z_1=g^{-1}(u)$ 为奇点而由(32)式，$\psi(z)$ 在 z_1 解析.

因此我们有 $u,v\in E$, 就是推论 4.6 所考虑的情形. 在推论的证明过程中已表明这时有 $\mathrm{area}E=0$ 且 $\mathrm{Re}d_0=0$. 并由考虑在应用薛礼尔兹不等式时等号成立的条件知(57)式成立. 因此，(56)式表明对于 $|z|=1$, $\mathrm{Re}[\varphi(z)-\psi(z)]=0$, 而由(32)式，对 $|z|=1$ 有 $\mathrm{Re}\varphi(z)=\mathrm{Re}\psi(z)=0$. 这就推得对 $w\in\partial g(\Delta)$ 有 $\mathrm{Re}h(w)=0$. 因 $\mathrm{area}E=0$, 从而 $E=\partial g(\Delta)$, 因而(55)式成立.

问　　题

1. 设 $g\in\Sigma$, $u,v\in E$. 试证明：函数

$$\sqrt{(g(z)-u)(g(z)-v)}$$

的系数满足与面积定理 1.2,(5)式类似的定理，虽然它并不一定单叶.

2. 设 $f\in S$, $\zeta\notin f(D)$. 试证明薛礼尔兹导数满足

$$\left|\{f(z),z\}+\frac{3}{4}\left(\frac{f'(z)}{f(z)-z}\right)^2\right|\leqslant\frac{6}{(1-|z|^2)^2},\ (|z|>1).$$

(先对 $z=0$ 证明不等式然后利用茹彭变换.)

3. 设 $v\in E$ 且 $\Psi(w)$ 以 u 为其 p 阶零点. 试证明: 如果 $g(z)$ 在 Δ 内至多只有 $p-1$ 个零点时则定理 4.5 的结论成立 (Pommerenke 1969a).

4. 在定理 4.6 的假设条件下, 试证明每个极值函数满足微分方程 (比较 7.4 节):

$$\frac{|zg'(z)\Psi'(g(z))|^2}{(g(z)-u)(g(z)-v)}=q(z)^2.$$

4.4 格拉贝定-谢菲尔不等式的应用

先考虑函数 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\in\Sigma$ 的不取值集 $E=E(g)=\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$ 的某些几何性质(也可参看 7.4 节). 我们可以使用标准化条件 $b_0=0$, $b_1\geqslant0$. 这不过相当于对 E 分别作了一个平移和一个旋转而已.

第一个结果只需要利用较简单的定理 4.4.

定理 4.7 设 $g\in\Sigma$ 且 $b_1\geqslant0$, 则当 $u,v\in E$, 有

$$|\mathrm{Re}[v-u]|\leqslant\sqrt{8(1+b_1)};$$

$$(1)\qquad |\mathrm{Im}[v-u]|\leqslant\begin{cases}\sqrt{8(1-b_1)}, & \text{当 } 0\leqslant b_1\leqslant\frac{1}{2},\\ \sqrt{\frac{2}{b_1}}, & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant b_1\leqslant1.\end{cases}$$

从 1.2 节定理 1.4, 我们已知 E 位于一个直径为 4 的闭圆盘中. 我们现在的定理表明, 若 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$, 则 E 位于一个直径为 4 的矩形中, 若 $|b_1|>\frac{1}{2}$, 则只能得到 E 位于一个直径不大于 $\sqrt{18}$ 的矩形中.

证 由(4.3.14)与(4.3.20)式可得

$$\left|\frac{1}{8}(v-u)^2-b_1\right|=|c_{11}|\leqslant1,\ (u,v\in E).$$

记 $x=\mathrm{Re}[v-u]$，$y=\mathrm{Im}[v-u]$，即得 $(x^2-y^2-8b_1)^2+(2xy)^2\leqslant 64$，故

(2) $$(x^2+y^2)^2-16b_1x^2+16b_1y^2\leqslant 64(1-b_1^2).$$

从而对 $u, v\in E$，

$$[\mathrm{Re}(v-u)]^2=x^2\leqslant 8(1+b_1).$$

又由(2)式我们得到

$$y^2\leqslant -x^2-8b_1+\sqrt{32b_1x^2+64}.$$

若 $b_1\leqslant\frac{1}{2}$，右端当 $x=0$ 时取最大值；若 $b_1\geqslant\frac{1}{2}$，则当 $x^2=8b_1-\frac{2}{b_1}$ 时取最大值。从而对于 $u,v\in E$，

$$[\mathrm{Im}(v-u)]^2\leqslant\begin{cases}8(1-b_1), & \text{当 } b_1\leqslant\frac{1}{2} \text{ 时,}\\ \frac{2}{b_1}, & \text{当 } b_1\geqslant\frac{1}{2} \text{ 时.}\end{cases}$$

例 4.3 函数

(3) $$g(z)=(z^2+2b+z^{-2})^{\frac{1}{2}}=z+bz^{-1}+\cdots$$
$$(0\leqslant b\leqslant 1)$$

把Δ映照成"十字"形集

$$E=[-\sqrt{2(1+b_1)},\ \sqrt{2(1+b_1)}]\cup[-i\sqrt{2(1-b_1)},\ i\sqrt{2(1-b_1)}]$$

的余集。因而估计式(1)对 $0\leqslant b_1\leqslant\frac{1}{2}$的情形是精确的。

下面我们考虑 $m=1$ 时的格拉贝定-谢菲尔不等式以证明詹肯斯(1960a)的如下结果：

定理 4.8 设 $0\leqslant\lambda\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 且 $v\in\mathbb{C}$。如果 $g\in\Sigma$ 而 $v\in E$ 时，则

(4) $$\mathrm{Re}[b_1e^{2i\theta}+2(b_0-v)e^{i\theta}\lambda]+\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+\frac{3}{2}\lambda^2+1\geqslant 0,$$

且对 λ,θ 和 v 的任何选择都能使等号成立。

证 不妨设 $\theta=0$，因为一般情形可以通过考虑 $e^{i\theta}g(e^{-i\theta}z)$ 而得到．我们应用 $m=1$ 的定理 4.5 并令 $\lambda_0=\lambda$，$\lambda_1=1$．由(4.3.22)式，$q(e^{it})=\lambda+2\cos t$．因 $0\leqslant\lambda\leqslant 2$，故 $q(e^{it})$ 有两个实零点(若 $\lambda=2$ 则为一个二重零点)．即容许条件是满足的．

再由(4.3.23)，(4.3.13)和(4.3.14)式我们得到

$$
\begin{aligned}
p(u,v) &= c_{11}+2c_{10}\lambda+c_{00}\lambda^2+1 \\
&= b_1-\frac{1}{8}(v-u)^2+(2b_0-u-v)\lambda \\
&\quad +\lambda^2\log\frac{4}{v-u}+1.
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}p(u,v) &= \frac{1}{4}(v-u)-\lambda+\frac{\lambda^2}{v-u} \\
&= \frac{1}{v-u}\left[\frac{1}{2}(v-u)-\lambda\right]^2.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

故若取 $u=v-2\lambda$ 则满足 $\dfrac{\partial}{\partial u}p(u,v)=0$，于是

$$
p(u,v)=b_1+\frac{3}{2}\lambda^2+2(b_0-v)\lambda+\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+1,
$$

取实部由定理 4.5 的结论便推出(4)式．关于等号的论述由下边的例子可得出．

例 4.4 设 $v\in\mathbb{C}$ 且 $u=v-2\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 2)$．考虑二次微分

$$
-\frac{w-u}{w-v}dw^2. \tag{6}
$$

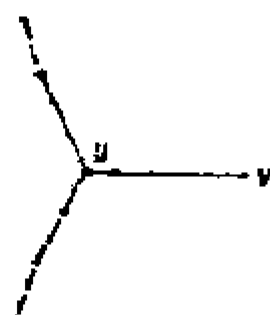


图 4.4

线段$[u,v]$是它的一条轨线．因 v 是(6)的单极点，故在 v 点无其它轨线；而 u 是单零点，故还有从 u 出发的另外两条轨线(见 8.2 节定理 8.2)，这两条轨线伸向∞，在有限点不相交．

设 E 是由线段$[u,v]$与两条从 u 出发的轨线弧组成的紧集(见图 4.4)．设 $g(z)=bz+b_0+\cdots(b>0)$把 Δ 映照成 $\hat{\mathbb{C}}\backslash E$．因 $v-u=2\lambda\leqslant 4$，故可选取两条轨线弧使

$b=1$ 从而 $g\in\Sigma$. 根据(4.3.29)式有 $\varphi(w)=w-u$, 从而二次微分(6)与(4.3.54)恒等. 因 $u,v\in E$,定理 4.6 表明 $\mathrm{Re}\,p(u,v)=0$. 若 $\lambda<2$, 则极值函数不是唯一的.

推论 4.7 设 $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots\in\Sigma_0$ 且 $b_1\geqslant 0$. 若 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 且有

$$(7)\qquad 1+b_1\cos 2\theta\leqslant\lambda^2\left(\frac{1}{2}+\log\frac{2}{\lambda}\right),\ (0\leqslant\lambda\leqslant 2),$$

则

$$(8)\qquad \mathrm{Re}(e^{i\theta}v)\leqslant\lambda\left(1+\log\frac{2}{\lambda}\right),(v\in E).$$

证 因 $b_0=0$, $b_1\geqslant 0$, 即从定理 4.8 得

$$2\mathrm{Re}[e^{i\theta}v]\leqslant\lambda\left(\frac{3}{2}+\log\frac{2}{\lambda}\right)+\lambda^{-1}(1+b_1\cos 2\theta),$$

于是由(7)式便推出(8)式.

现在再讨论对于 S 与 Σ 类系数问题上的应用. 首先由定理 4.8 导出珍肯斯 (1960a) 的一个结果:

推论 4.8 设 $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\in S$. 如果对于 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\lambda\leqslant 2$ 有

$$(9)\qquad \mathrm{Re}[e^{i\theta}a_2]\leqslant\lambda\left(1+\log\frac{2}{\lambda}\right),$$

则

$$(10)\qquad \mathrm{Re}(e^{2i\theta}a_3)\leqslant 1+\frac{1}{4}\lambda^2+\lambda^2\left(\frac{1}{2}+\log\frac{2}{\lambda}\right)^2.$$

对于取定的每一对 θ 和 λ, 都存在函数 $f\in S$ 使 (9) 式和 (10) 式中的等号同时成立.

由于 $|a_2|\leqslant 2$, 我们总可以选取 $\lambda=2$, 这时因为 θ 的任意性便可由(10)式得到 $|a_3|\leqslant 3$ (Löwner 1923).

证 不妨设 $\theta=0$, 否则考虑 $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$ 即可. 对 $v=0\in g(\Delta)$应用定理 4.8 于函数

$$(11)\qquad g(\zeta)=\frac{1}{f(\zeta^{-1})}=\zeta-a_2+(a_2^2-a_3)\zeta^{-1}+\cdots(\zeta\in\Delta),$$

则根据(4)式便得到

$$(12)\qquad \mathrm{Re}\,a_3 \leqslant (\mathrm{Re}\,a_2)^2-(\mathrm{Im}\,a_2)^2-2\lambda\mathrm{Re}\,a_2$$

$$+\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+\frac{3}{2}\lambda^2+1$$

$$\leqslant(\mathrm{Re}\,a_2-\lambda)^2+\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+1,$$

于是由(9)式便推出(10)式。 等号成立的结论由下面的例子给出。

例 4.5 *仍取例 4.4 的函数 $g\in\Sigma$ 而取 $\nu=0$; $\theta=0$,* 其中选取两条轨线弧等长。再考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{g(z^{-1})}$. 这一函数具有实系数，且 $\mathbf{C}\backslash f(D)$ 由射线 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2\lambda}\right)$ 以及从 $-\dfrac{1}{2\lambda}$ 出发的两条对称弧段组成(见图 4.5)。当 $\lambda=2$ 时，我们得到寇勃函数。因而 $a_2=2$; $\lambda=0$ 的极限情形则得到 $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$，故 $a_2=0$; 如果 $0<a_2<2$，则可找到唯一的 λ 使 $a_2=\lambda\left(1+\log\dfrac{2}{\lambda}\right)$, $0<\lambda<2$. 于是，由 $\mathrm{Im}\,a_2=0$, (12)式的第二个不等式等号成立；而由例 4.4 知第一个不等式等号成立。

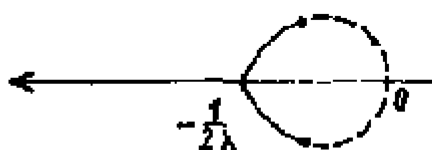


图 4.5

下面再考虑格拉贝定-谢菲尔不等式当 $m=2$ 且对称的简单情形。我们来证明珍肯斯的另一个结果(1960a).

定理 4.9 设 $0\leqslant\lambda\leqslant 2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 对 $g\in\Sigma$，有

(13) $$\operatorname{Re}\left[\left(b_3+\frac{1}{2}b_1^2\right)e^{2i\theta}-2b_1\lambda e^{i\theta}\right]+\frac{3}{4}\lambda^2$$
$$+\frac{1}{2}\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{2}\geqslant 0,$$
且对λ和θ的每一选取等号都能成立.

证 不妨设 $b_1 \geq 0$, $\theta = 0$. 对$m=2$及 $\lambda_0=-\lambda$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ 应用定理 4.5. 这时 (4.3.22) 式为 $q(e^{it})=-\lambda+2\cos 2t$. 因 $0\leqslant\lambda\leqslant 2$, 函数 $q(e^{it})$ 有4个实零点,即容许条件满足.

由(4.3.23),(4.3.13)与(4.3.14)式我们得到

(14) $$p(u,v)=b_3+\frac{1}{2}b_1^2-\frac{1}{256}(u-v)^4$$
$$-\frac{1}{32}(u-v)^2(u+v)^2-2\left[b_1-\frac{1}{16}(u-v)^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{8}(u+v)^2\right]\lambda+\lambda^2\log\frac{4}{v-u}+\frac{1}{2}.$$

故

$$\frac{\partial}{\partial u}p(u,v)=-\frac{1}{64}(u-v)^3-\frac{u}{8}(u^2-v^2)$$
$$+\left(\frac{u-v}{4}+\frac{u+v}{4}\right)\lambda-\frac{\lambda^2}{u-v},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}p(u,v)=\frac{1}{64}(u-v)^3+\frac{v}{8}(u^2-v^2)$$
$$-\left(\frac{u-v}{4}-\frac{u+v}{4}\right)\lambda+\frac{\lambda^2}{u-v}.$$

若取 $v=-u$, 则

$$-\frac{\partial}{\partial u}p(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}p(u,v)=\frac{1}{8u}(u^2-2\lambda)^2.$$

因此若取

(15) $$u=-\sqrt{2\lambda},\quad v=\sqrt{2\lambda},$$

则定理4.5的条件(4.3.24)和(4.3.25)同时满足. 于是(14)式成为

(16)
$$p(u,v)=b_3+\frac{1}{2}b_1^2-\frac{1}{4}\lambda^2-2b_1\lambda$$
$$+\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{2}+i\beta,\ (\beta\in\mathbf{R}),$$

由 $\mathrm{Re}\,p(u,v)\geqslant 0$ 即推出(13)式．关于等号的结论包含在下面的例子中。

例 4.6 考虑二次微分

(17)
$$(2\lambda-w^2)dw^2,\ (0\leqslant\lambda\leqslant 2).$$

则 $[-\sqrt{2\lambda},\sqrt{2\lambda}]$ 是一条轨线，并且从点 $\pm\sqrt{2\lambda}$ 出发均有另外两条轨线彼此交成 $\frac{2\pi}{3}$ 角且伸向∞而不相交。

设 E 是关于 0 点对称的连续统，它由线段 $[-\sqrt{2\lambda},\sqrt{2\lambda}]$ 及四条轨线弧组成(见图 4.6)．因 $2\sqrt{2\lambda}\leqslant 4$，故可选取这些轨线弧使得存在 $g\in\Sigma$ 而把 Δ 映照成 $\hat{\mathbf{C}}\backslash E$．因 $g(z)$ 为奇函数故 $b_0=0$，由(4.3.6)式我们有 $\varphi_2(w)=w$，从而由(4.3.29)式就有 $\varphi(w)=w^2-2\lambda$．于是二次微分(17)与(4.3.54)恒等．将定理 4.6 应用于(16)式便知(13)式中等号成立．

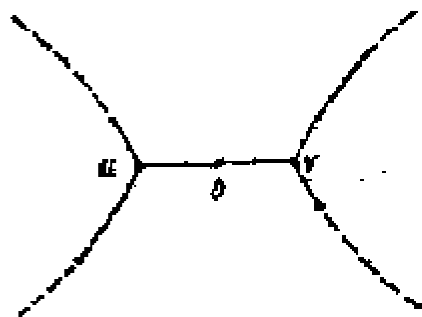


图 4.6

若取所有的轨线弧等长，则全部系数皆为实数，用连续性论证即可证明所有值 $0\leqslant b_1\leqslant 1$ 均可由适当选取 λ 而得到．

推论 4.9 若 $g\in\Sigma$，则

(18)
$$|b_1|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-3},$$

且等号能够成立。

这一估计由格拉贝定与谢菲尔(1955b)用变分方法首先证明.

证 若取 $\theta = -\frac{1}{2}\arg b_3 \pm \frac{\pi}{2}$，则有

$$\mathrm{Re}[b_3 e^{2i\theta}] = -|b_3|,\quad \xi = \mathrm{Re}[b_1 e^{i\theta}] \geqslant 0.$$

由定理 4.9 而有

$$(19)\qquad |b_3| \leqslant \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{Im}\, b_1 e^{i\theta})^2 - 2\lambda\xi + \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\log\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

由微分法易得 λ 的最优选择由

$$\xi = \frac{1}{2}\lambda\left(1 + \log\frac{2}{\lambda}\right)$$

确定；由于 $0 \leqslant \xi \leqslant 1$，故恰存在一个 $\lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant 2)$ 具有该性质。取这个 λ 值便从(19)式得到

$$(20)\qquad |b_3| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2}{4}\log\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{8}\left(\log\frac{2}{\lambda}\right)^2,$$

其右端关于 λ 的导数为 $\frac{1}{4}\lambda\left[\log\frac{2}{\lambda} - 3\right]\log\frac{2}{\lambda}$，故当 $\lambda = 2e^{-3}$ 时达到最大值。将此 λ 值代入(20)便得到(18)式.

由例 4.6 知存在奇函数 $g \in \Sigma, b_1 = 4e^{-3}$ 使得对于 $\theta = 0$ 和某个 $\lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant 2)$，(13)式等号成立，即

$$-\mathrm{Re}\, b_3 = \frac{1}{2} + 8e^{-6} - 8\lambda e^{-3} + \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda^2\log\frac{2}{\lambda}.$$

当 $\lambda = 2e^{-3}$ 时上式右端有最小值 $\frac{1}{2} + e^{-6}$，再利用(18)式即断定 $b_3 = -\left(\frac{1}{2} + e^{-6}\right)$ 且 $\lambda = 2e^{-3}$.

拔塞松与谢菲尔(1972)利用 $m = 2$ 及 $v \in B$ 的格拉贝定-谢菲尔不等式对 $f \in S$ 证明了有 $|a_5| \leqslant 5$。因其证明太长，不能在这里介绍了。

问　　题

1. 设 $g\in\Sigma$，试证明：若 $|b_1|\leqslant\frac{1}{2}$，则 E 位于一个宽度 $\leqslant 2\sqrt{2}$ 的平行带形域内；若 $\frac{1}{2}\leqslant|b_1|\leqslant 1$，则位于宽度 $\leqslant 2$ 的带形域内.

2. 试对 $f\in S$ 证明精确估计：

$$-1\leqslant|a_3|-|a_2|\leqslant\frac{1}{2}\lambda_0^2-\frac{1}{2}\lambda_0+\frac{3}{4}\approx 1.03,$$

其中 $\lambda_0\approx 2.80$ 是 $2\lambda_0\log\frac{3}{\lambda_0}-1$ 的最大零点 (Goluzin 1946a; 参看 Jekins 1960a).

3. 设 $f\in S$ 且 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，试证明精确估计

$$|a_3-\alpha a_2^2|\leqslant 1+2\exp\left(-\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right).$$

(Fekete and Szegö 1933; 见 6.2 节定理 6.4).

4. 以 $\Phi_2(w)$ 表示 $g\in\Sigma$ 的二次法贝尔多项式，证明：

$$\max_{w\in E}|\Phi_2(w)|\leqslant 2+4e^{-2}\approx 2.54.$$

5. 设 $g\in\Sigma$ 且 $0\leqslant\alpha<1$，试证：

$$|2b_1+\alpha b_1^2|\leqslant 1+2\exp\left(-\frac{6+2\alpha}{1-\alpha}\right).$$

第五章 增长问题

关于单叶函数的增长问题,对于许多情形已有所了解. 例如,已经知道,对某个 $\alpha>0$, 当 $|z|\to 1-0$ 时,

$$f(z)=O((1-|z|)^{-\alpha}).$$

本章首先讨论,这一结果对于别的量,尤其是对于系数,能导出什么结果. 我们导出并证明这些结果,主要根据对于积分均值的估计. 并且其中大多数结果能够推广到面积平均 p 叶函数,即满足

$$\iint_{|w|<r} n(w)d\Omega \leqslant \pi p r^2 \quad (0<r<\infty)$$

的函数,其中 $n(w)$ 是 $f(z)-w$ 在 D 内的零点个数 (参看海曼的书).

其次,我们要讨论一个单叶函数的增长是怎样产生的. 我们将会看到,对于单叶函数,一般来说它或它的系数增长越快就越规则. 具有最大增长的函数是一个方面的例子. 而幂级数展开式中具有大间断的函数是另一方面的例子. 这部分内容讨论的主要工具是戈鲁辛不等式(见 3.2 节).

在这一章我们将会遇到好几个尚未解决的问题.

5.1 对积分的估计

1. 首先证明哈代 (Harday 1915) 的一个恒等式.

引理 5.1 设 $\Phi(t)$ 二阶连续可微,令

$$\Psi(t)=t\frac{d}{dt}[t\Phi'(t)] \quad (0\leqslant t<\infty); \tag{1}$$

又设 $f(z)$ 在 D 内解析并令

$$J(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(|f(z)|)d\theta, \quad (z=re^{i\theta},\ 0\leqslant r<1). \tag{2}$$

如果 $f(z)$ 在 $|z|=r$ 上不等于零，则

(3) $$r\frac{d}{dr}[rI'(r)]=\frac{r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(|f(z)|)\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 d\theta,$$
$$(z=re^{i\theta}).$$

证 由恒等式

$$r\frac{\partial}{\partial r}|f(z)|=|f(z)|\operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}|f(z)|=-|f(z)|\operatorname{Im}z\frac{f'(z)}{f(z)},$$

经简单计算得到恒等式：

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\Phi(|f(z)|)+\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\Phi(|f(z)|)$$
$$=\varphi(|f(z)|)\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|^2.$$

积分上式并利用(2)式，因左端第二项积分为零，于是得出(3)式。

定义积分均值

(4) $$I_\lambda(r)=I_\lambda(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta,\quad(0\leqslant r<1).$$

在引理 5.1 中取 $\Phi(t)=t^\lambda$，便知对于 D 内所有解析函数 $f(z)$，有

(5) $$\frac{d}{dr}[rI'_\lambda(r)]=\frac{\lambda^2 r}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^{\lambda-2}|f'(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

因此知 $rI'_\lambda(r)$ 与 $I_\lambda(r)$ 当 $0\leqslant r\leqslant 1$ 都是递增的。

再定义

(6) $$M(r)=M(r,f)=\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}|f(re^{i\theta})|,\quad(0\leqslant r<1),$$

(7) $$M_T(r)=\sup_{\theta\in T}|f(re^{i\theta})|,\quad(T\subset[0,2\pi],0\leqslant r<1).$$

并且约定以 $K, K_1,\cdots$ 表示绝对常数，而以 $K(\cdot)$ 与 $K(\cdot,\cdot)$ 表示只与所列参数有关的常数。

定理 5.1 设 $\lambda>0$，$f\in S$。则

(8) $$I_\lambda(r)\leqslant r\int_0^r M(\rho)^\lambda\rho^{-1}d\rho,\quad(0\leqslant r<1).$$

证 积分(5)式得到

$$rI_\lambda'(r)=\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{|z|\leqslant r}|f(z)|^{\lambda-2}|f'(z)|^2d_z\Omega.$$

因 $f(z)$ 单叶，故可作代换 $w=f(z)$。由于对 $|z|\leqslant r$ 有 $|f(z)|\leqslant M(r)$，所以有

$$rI_\lambda'(r)\leqslant\frac{\lambda^2}{2\pi}\iint_{|w|\leqslant M(r)}|w|^{\lambda-2}d_w\Omega=\lambda^2\int_0^{M(r)}t^{\lambda-1}dt=\lambda M(r)^\lambda,$$

积分之便得出(8)式。

普拉维兹 (Prawitz 1927) 的这一结果可以推广到平均多叶函数 (Spencer 1941，Hayman 45 页)。在此我们附带指出，在相反的方向上，哈代与李特伍德已经证明：对于所有的解析函数，有

$$\int_0^r M(\rho)^\lambda d\rho\leqslant\pi I_\lambda(r).$$

最近，伯恩斯坦 (Baernstein 1974) 还证明了一个值得注意的结果：对 S 中所有函数 f 有

$$I_\lambda(r,f)\leqslant\frac{r^\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}|1-re^{i\theta}|^{-2\lambda}d\theta,\quad(0\leqslant r<1;\ \lambda>0),$$

对这一结果，寇勃函数是极值函数。

如下带有技巧性的结果，今后我们将反复用到。

引理 5.2 设 T 是 $[0,2\pi]$ 的一个开子集，$0\leqslant r<1$。若 $f\in S$，则

$$(9)\quad\int_T|f'(re^{i\theta})|^2|f(re^{i\theta})|^{\lambda-1}d\theta\leqslant\begin{cases}K(\lambda)\dfrac{r^{-1}}{1-r}M_T(r)^\lambda & (\lambda>0),\\[2ex] K(\lambda)\dfrac{r^{\lambda-1}}{1-r} & (\lambda<0).\end{cases}$$

证 如果 $0\leqslant r\leqslant\frac{1}{2}$，则可以从寇勃偏差定理推出这一结论。现假设 $\frac{1}{2}<r<1$，并记 $r'=\frac{1}{2}(1+r)$。由引理 1.3 及 (1.2.

13)式知，对 $|z|<1$ 有

$$(10)\qquad \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant \frac{4+2|z|}{1-|z|^2},$$

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

经积分推出

$$(11)\qquad \frac{1}{K_1} \leqslant \left|\frac{f(\rho e^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leqslant K_1,$$

$$(r \leqslant \rho \leqslant r').$$

$$\frac{1}{K_2} \leqslant \left|\frac{f'(\rho e^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| \leqslant K_2,$$

从而有

$$r|f(re^{i\theta})|^{\lambda-2}|f'(re^{i\theta})|^2 \leqslant K_3(\lambda)\rho|f(\rho e^{i\theta})|^{\lambda-2}|f'(\rho e^{i\theta})|^2.$$

取 $B(r)=\{\rho e^{i\theta}: r\leqslant\rho\leqslant r',\ \theta\in T\}$，则积分表明：

$$(12)\qquad r(r'-r)\int_T |f(re^{i\theta})|^{\lambda-2}|f'(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

$$\leqslant K_3(\lambda)\iint_{B(r)} |f(z)|^{\lambda-2}|f'(z)|^2 d_z\Omega.$$

作代换 $w=f(z)$。因为根据(1.2.12)式及本节的(7)和(11)式，对于 $z\in B(r)$ 有

$$\frac{1}{8} \leqslant |f(z)| \leqslant K_1 M_T(r),$$

因此(12)式的右端

$$\leqslant K_3(\lambda)\iint_{\frac{1}{8}\leqslant|w|\leqslant K_1 M_T(r)} |w|^{\lambda-2} d_w\Omega$$

$$= K_4(\lambda)\left[(K_1 M_T(r))^\lambda - \frac{1}{8^\lambda}\right],$$

因为 $r(r'-r) \geqslant \frac{1}{4}(1-r)$，故可由此推出(9)式。

2. 下一个引理把对数导数的增长与积分均值的增长相联系。这引理的性质同于3.5节列别杰夫和米林的那些引理。

引理 5.3 设 $h(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析且

(13) $$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqslant \frac{c}{1-|z|}, \quad (r_0 \leqslant |z| < 1).$$

则对于 $\lambda > 0$，有

(14) $$I_\lambda(r, h) \leqslant K(c, r_0, \lambda) I_\lambda(r_0, h)(1-r)^{-\beta},$$
$$(r_0 \leqslant r < 1),$$

其中 $\beta = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4c^2\lambda^2}-1) \leqslant c^2\lambda^2$.

证 对于 $z = re^{i\theta}$，根据 (5) 式与 (13) 式有

$$I_\lambda''(r) \leqslant \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(z)|^\lambda \left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|^2 d\theta \leqslant \frac{c^2\lambda^2}{(1-r)^2} I_\lambda(r),$$
$$(r_0 \leqslant r < 1).$$

将这一微分不等式与其相应的微分方程

$$u''(r) = \frac{c^2\lambda^2}{(1-r)^2} u(r)$$

比较. 微分方程的一般解为

$$u(r) = a(1-r)^{-\beta} + b(1-r)^{1+\beta},$$

其中 β 如引理中所规定. 若选取 a 和 b，使得 $u(r_0) = I_\lambda(r_0)$，$u'(r_0) = I_\lambda'(r_0)$，从而便有(参看 Beckenbach-Bellman 139页):

$$I_\lambda(r) \leqslant u(r) \leqslant (|a| + |b|)(1-r)^{-\beta}, \quad (r_0 \leqslant r < 1).$$

此式即蕴含 (14) 式，因为由 (13) 式可得

$$|a| + |b| \leqslant K_1(\beta, r_0)(I_\lambda(r_0) + I_\lambda'(r_0))$$
$$\leqslant K_2(c, r_0, \lambda) I_\lambda(r_0).$$

引理 5.4 设 $f \in S$ 且 $\lambda > 0$，则

(15) $$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant \frac{K(\lambda)}{(1-r)^{\gamma(\lambda)}}, \quad (0 \leqslant r < 1),$$

其中 $\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+40\lambda^2}-1) < 10\lambda^2$.

证 我们由 (10) 式推出，当 $\frac{3}{4} \leqslant |z| < 1$ 时，

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant \sqrt{10}(1-|z|)^{-1}.$$

于是由引理 5.3 及寇勃偏差定理，对 $\frac{3}{4}\leqslant r<1$ 有

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\lambda}d\theta\leqslant\frac{K_1(\lambda)}{(1-r)^{\gamma(\lambda)}}\max_{|z|=\frac{3}{4}}|f'(z)|^{\lambda}\leqslant\frac{K(\lambda)}{(1-r)^{\gamma(\lambda)}}.$$

当 $0\leqslant r<\frac{3}{4}$ 时结论显然成立.

定理 5.2 若 $f\in S$，则

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta\leqslant K(1-r)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{320}},\quad\left(\frac{1}{2}<r<1\right). \tag{16}$$

克伐利与泊茂仁克（Kövari and Pommerenke 1967）的这一结果当然不是精确的.(16)式对于平均单叶函数不成立，在那里指数为 $-\frac{1}{2}+\varepsilon$（对每一个 $\varepsilon>0$）就是最佳的.

证 设 $\delta>0$，$z=re^{i\theta}$，应用海尔塞（Hölder）不等式得到

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta\leqslant\left(\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{2}|f(z)|^{-\frac{2}{1-\delta}}d\theta\right)^{\frac{1-\delta}{2}}\times\left(\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\frac{2\delta}{1+\delta}}d\theta\right)^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

取 $\lambda=-\frac{2\delta}{1-\delta}<0$，应用引理 5.2 估计右端第一个积分，应用引理 5.4 估计第二个积分，我们得到

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta\leqslant K_1(\delta)(1-r)^{-\frac{1-\delta}{2}}\cdot(1-r)^{-\frac{40\delta^2}{(1+\delta)^2}\cdot\frac{1+\delta}{2}}$$

$$\leqslant K_1(\delta)(1-r)^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}-20\delta^2}.$$

选择 $\delta=\frac{1}{80}$ 时为最优，此时即得出 (16) 式.

问 题

1. 设 $f\in S$ 且 $\lambda>\frac{2}{5}$. 试利用引理 5.2 证明

$$\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta\leqslant K(\lambda)(1-r)^{-3\lambda+1},$$

2. 设 $f(z)=z+\cdots$ 在 $|z|<1$ 内星形。试证:

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta=O\left(\log\frac{1}{1-r}\right),\quad (r\to 1-0).$$

3. 设 $f\in S$。试证: 对于 $z=re^{i\theta}$, $\frac{1}{2}<r<1$ 有

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^2 d\theta\leqslant K_1(1-r)^{-1}(\log M(r)+K_2).$$

5.2 系数的增长

1. 我们的目的是要通过最大模 $M(r)=M(r,f)$ 的增长情况来估计函数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\quad(|z|<1) \tag{1}$$

的系数。

首先估计曲线 $\{f(z):\ |z|=r\}$ 的长度

$$l(r)=r\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|d\theta\quad(0\leqslant r<1). \tag{2}$$

由于

$$n|a_n|=\frac{1}{2\pi r^{n-1}}\left|\int_0^{2\pi}f'(re^{i\theta})e^{-i(n-1)\theta}d\theta\right|\leqslant\frac{l(r)}{2\pi r^n}, \tag{3}$$

并且 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, 故有

$$n|a_n|\leqslant\frac{e}{2\pi}\,l\left(\frac{n}{n+1}\right)\quad(n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

定理 5.3 设 $f\in S$, 如果对于某两个常数 $B>0$ 和 $\alpha\geqslant 0$ 有

$$M(r)\leqslant B(1-r)^{-\alpha}\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant r<1\right), \tag{5}$$

则对于 $0\leqslant r<1$, 有

$$l(r)\leqslant\begin{cases}K(\alpha)B(1-r)^{-\alpha}, & 当\ \alpha>\dfrac{1}{2},\\[2ex] K(\alpha)B(1-r)^{-\frac{1}{2}+\eta}, & 当\ 0\leqslant\alpha<\dfrac{1}{2},\end{cases} \tag{6}$$

其中$\eta = \frac{1-2\alpha}{320}$，$K(\alpha)$ 为只与α有关的常数。因此，对$n=1, 2, \cdots$，有

(7) $$|a_n| \leqslant \begin{cases} K(\alpha)Bn^{\alpha-1}, & 当\ \alpha > \frac{1}{2}, \\ K(\alpha)Bn^{-\frac{1}{2}-\eta}, & 当\ 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\alpha > \frac{1}{2}$ 时的结果 (Littlewood and Paley 1932) 可以推广到平均多叶函数 (Spencer 1941，也可参看 Hayman 46 页)。$\alpha < \frac{1}{2}$ 时的结果 (Clunie and Pommerenke 1967) 对于平均多叶函数不成立，因为对这类函数，$a_n = O(n^{-\frac{1}{2}})$ 已是最佳的 (Pommerenke 1962b)。

证 由(5)式及对 $|z| \leqslant \frac{1}{2}$的情形应用薛瓦尔兹引理推出

(8) $$M(r) \leqslant 2^{\alpha+1}Br(1-r)^{-\alpha} \quad (0 \leqslant r < 1).$$

先设 $\alpha > \frac{1}{2}$，并取λ满足 $\frac{1}{\alpha} < \lambda < 2$. 由(2)式应用薛瓦尔兹不等式我们得到

$$l(r)^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(z)|^2 |f(z)|^{-\lambda} d\theta \int_0^{2\pi} |f(z)|^\lambda d\theta \quad (z = re^{i\theta}).$$

故由引理5.2，定理5.1以及(8)式，因$2-\lambda > 0$，$\alpha\lambda > 1$ 而得到

$$\begin{aligned} l(r)^2 &\leqslant K_1(\alpha)B^{2-\lambda}(1-r)^{-1-\alpha(2-\lambda)} \int_0^r B^\lambda \rho^{\lambda-1}(1-\rho)^{-\alpha\lambda} d\rho \\ &\leqslant K_2(\alpha)B^2(1-r)^{-1-2\alpha+\alpha\lambda}(1-r)^{-\alpha\lambda+1} \\ &= K_2(\alpha)B^2(1-r)^{-2\alpha}. \end{aligned}$$

这就对 $\alpha > \frac{1}{2}$ 证明了(6)式. 由(4)式可推出(7)式的相应部分.

现在假设$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. 令 $0 < \delta < 1$，由海尔窦不等式得到

$$I(r) \leqslant \left(\int_0^{2\pi} |f|^{\frac{2}{2\alpha+\delta}} d\theta\right)^{\frac{2\alpha+\delta}{2}} \left(\int_0^{2\pi} |f'|^2 |f|^{-\frac{2}{1-\delta}} d\theta\right)^{\frac{1-\delta}{2}}$$
$$\cdot \left(\int_0^{2\pi} |f'|^{\frac{2\delta}{1-2\alpha}} d\theta\right)^{\frac{1-2\alpha}{2}}.$$

用定理5.1与(8)式估计第一个积分；用引理5.2取 $\lambda = -\frac{2\delta}{1-\delta} <$ 0 估计第二个积分；用引理5.4估计第三个积分，我们得到

$$I(r) \leqslant K_1(\alpha, \delta) B\left(\int_0^r (1-\rho)^{-\frac{2\alpha}{2\alpha+\delta}} d\rho\right)^{\frac{2\alpha+\delta}{2}}$$
$$\times (1-r)^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{20\delta^2}{1-2\alpha}}$$
$$\leqslant K_2(\alpha, \delta) B (1-r)^{-\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}-\frac{20\delta^2}{1-2\alpha}}.$$

最优选择 $\delta = \frac{1-2\alpha}{80}$ 给出当 $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ 时的(6)式，从而有(7)式。

反过来，如果对于 $\alpha > 0$，有 $a_n = O(n^{\alpha-1})$ $(n \to \infty)$，则可推出

$$M(r) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} r^n = O((1-r)^{-\alpha}),$$
$$(r \to 1-0).$$

这一结果与定理5.3联系，就表明当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，有

$$(9) \qquad M(r) = O((1-r)^{-\alpha}) \Longleftrightarrow I(r) = O((1-r)^{-\alpha})$$
$$\Longleftrightarrow a_n = O(n^{\alpha-1}).$$

因此当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，估计式(6)和(7)是最佳的（不考虑常数因子）。当然，寇勃偏差定理已表明 $M(r) \leqslant (1-r)^{-2}$，故这最佳结果也只当 $\alpha \leqslant 2$ 时才有价值。

从定理5.3我们得知，对于某两个绝对常数 K_1 与 K_2，必有

$$(10) \qquad I(r) \leqslant K_1(1-r)^{-2}, \quad |a_n| \leqslant K_2 n;$$

而我们在3.4节也已经证明了 $|a_n| < 1.081n$（也可参看1.3节）。

当 $\alpha < \dfrac{1}{2}$ 时的(6)式和(7)式显然不是最佳的。其中 $\alpha = 0$ 的情形特别有意义. 这时(7)式表明对于每个有界单叶函数有

$$(11) \qquad a_n = O\left(n^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{300}}\right), \quad (n \to \infty).$$

我们来证明一个反面的结果:

定理 5.4 存在具有非负系数的单叶奇函数 $f(z)$，当 $|z| < 1$ 时有 $|f(z)| < 1$，并且

$$(12) \qquad a_n > n^{0.17-\varepsilon}$$

对无限多个 n 成立.

这一结果 (Littlewood 1938, Pommerenke 1967a) 表明了(9)式对 $0 \leqslant \alpha < 0.17$ 不成立；但对于任何一个 $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$，(9) 式是否成立还不知道. 为了要对 $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$ 证明(9)式，特别要证明对给定的一个有界单叶函数有 $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$，就必需作进一步的假设. 例如，若函数近于凸则此事成立 (Clunie and Pommerenke 1966). 关于这个方面的某些结果，可参看 Sheil-Small 1969, 1970; Thomas 1967, 1968 和本章第 4 节.

证 我们用记号

$$(13) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \ll \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n$$

表示 $\alpha_n \leqslant \beta_n (n = 0, 1, \cdots)$. 设函数

$$(14) \qquad p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \gg 0$$

当 $|z| < 1$ 满足 $\operatorname{Re} p(z) > 0$，以及

$$(15) \qquad c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} < \infty.$$

令 $q \geqslant 4$ 是一个偶数. 因有 $c_n \geqslant 0$，则

$$(16)\qquad \varphi_k(z) = z e^{-cq^{-k}} \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} q^{-k} z^{nq^k}\right]$$

$$\gg z e^{-cq^{-k}}(1 + c_1 q^{-k} z^{q^k}), \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

是奇函数. 它在 $|z| < 1$ 内满足 $|\varphi_k(z)| < 1$, 且

$$(17)\qquad z\frac{\varphi_k'(z)}{\varphi_k(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{nq^k} = p(z^{q^k})$$

具有正实部. 因此, 函数 $\varphi_k(z)$ 星形从而是单叶的 (参见2.2节).

现在引入一个函数序列. 取 $f_0(z) = z$, 并递归地定义

$$(18)\qquad f_{k+1}(z) = f_k(\varphi_k(z)), \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

$f_k(z)$ 也是奇函数,它在D内单叶且满足 $|f_k(z)| < 1$, 用归纳法可以证明 $f_k(z) \gg 0$. 记

$$(19)\qquad f_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} z^n.$$

则由(18)式与(16)式推出

$$(20)\quad f_{k+1}(z) \gg a_{k,n}\varphi_k(z)^n \gg a_{k,n} z^n e^{-cnq^{-k}}(1 + c_1 n q^{-k} z^{q^k}).$$

令 $n_k = \dfrac{q^k - 1}{q - 1}$, $(k = 1, 2, \cdots)$, 则 $n_{k+1} = n_k + q^k$. 由(19)式和(20)式(取n为n_k)得到

$$n_{k+1}a_{k+1,n_{k+1}} \geq \exp\left[-\frac{c}{q-1} - \frac{c}{q^k}\right]\frac{qc_1}{q-1}$$

$$\times (1 - q^{-k-1}) n_k a_{k,n_k}$$

故有

$$(21)\qquad n_k a_{k,n_k} \geq K_1\left(\exp\left[-\frac{c}{q-1}\right]\frac{qc_1}{q-1}\right)^k \geq K_2 n_k^{\beta},$$

$$(k = 1, 2, \cdots),$$

其中 K_1, $K_2 \cdots$ 表示正常数,而

$$(22)\qquad \beta = \left(\log\frac{qc_1}{q-1} - \frac{c}{q-1}\right) \Big/ \log q.$$

又由(20)式有

$$a_{k+1,n_j} \geqslant \exp[-cn_jq^{-k}]a_{k,n_j}, \quad (j=1,2,\cdots).$$

因此由(21)式推出

(23) $$a_{k,n_j} \geqslant K_3 a_{j,n_j} \geqslant K_4 n_j^{\beta-1}, \quad (k \geqslant j).$$

令 $k\to\infty$. 由$|f_k(z)|<1$ $(|z|<1)$, 知可以找到 $(f_k(z))$ 的子序列在 D 内局部一致收敛于某个奇函数 $f(z) \gg 0$. 又由(23) 式(取 $j=1$), $f_k'(0)=a_{k,1}\geqslant K_4>0$, 从而 $f(z)$ 在D内单叶. 再由(23)式,知其系数满足

(24) $$a_{n_j} \geqslant K_4 n_j^{\beta-1}, \quad (j=1,2,\cdots).$$

现在选取函数(14)为

$$p(z)=1+\frac{4}{\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\tau}{n^2}z^n, \quad (|z|\leqslant 1),$$

其中 $0<\tau<\pi$. 由

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p(e^{i\theta}) &= 1+\frac{4}{\tau^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\tau}{n^2}\cos n\theta \\ &= \begin{cases}2\pi\tau^{-2}(\tau-|\theta|), & |\theta|\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant|\theta|\leqslant\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

即在D内有 $\operatorname{Re}p(z)>0$. 当 $\tau=\frac{\pi}{3}$ 时,求得

$$c_1=\frac{18}{\pi^2}, \quad c=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{\pi^2}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{3}}{n^3}<2.93^{1)};$$

取 $q=14$, 由(22)式得到 $\beta>0.17$. 于是从(24)式便推出(12)式.

2. 现在考虑Σ中函数

(25) $$g(\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^{-n}, \quad (|\zeta|>1).$$

其系数变化情形类似于有界单叶函数.

定理 5.5 设 $g\in\Sigma$. 则对于某个绝对常数 K_5有

1) 原文遗漏因子 $\frac{36}{\pi^2}$. ——译者注

(26) $$|b_n| < Kn^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{320}}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

另一方面，又存在Σ中函数使得对无限多个n有

(27) $$|b_n| > n^{0.17-1}.$$

上界估计(26) (Clunie and Pommerenke 1967) 中，如果没有颇小的数 $\frac{1}{320}$，则结论是平凡的，因为由面积定理即可直接推出 $|b_n| \leqslant n^{-\frac{1}{2}}$. 我们由定理 2.10 知，$\Sigma$中星形函数对所有的$n$满足

$$|b_n| \leqslant \frac{2}{n+1};$$

并且，这一估计当 $n = 1, 2$ 时对整个Σ类成立(定理 3.5)，但对 $n = 3$ 却不成立了 (推论 4.9). 而我们现在的定理的第二部分 (Clunie 1959b, Pommerenke 1967a) 表明，对于Σ类来说，甚至连 $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ 也不成立. 关于 b_n 增长的精确阶的确定，现在还未解决.

证 (a) 先证(26)式. 选取 $w \in \mathbf{C}\setminus g(\Delta)$，对于$S$中函数

(28) $$f(z) = \frac{1}{g(z^{-1}) - w}, \quad (|z| < 1)$$

应用定理 5.2，我们得到，对 $\rho > 1$，

(29) $$\int_0^{2\pi} \left|\frac{g'(\rho e^{it})}{g(\rho e^{it}) - w}\right| dt = \frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi} \left|\frac{f'(\rho^{-1}e^{i\theta})}{f(\rho^{-1}e^{i\theta})}\right| d\theta$$
$$\leqslant K_1\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{320}}.$$

由寇勃偏差定理有

$$|g(\zeta) - w| = \frac{1}{|f(\zeta^{-1})|} \leqslant |\zeta|(1 + |\zeta|^{-1})^2 < 5,$$
$$(1 < |\zeta| \leqslant 2).$$

则由(29)式我们得出

(30) $$\int_0^{2\pi} |g'(\rho e^{it})| dt \leqslant K_2\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{320}}, \quad (1 < \rho \leqslant 2).$$

如同在(3)式中所作的那样，取 $\rho = 1 + \frac{1}{n}$ 即推出(26)式.

(b) 再设 $f(z) = a_1 z + \cdots$ 是如定理 5.4 中所定义的函数. 则因为 $w^{-1} + \frac{1}{2}w^2$ 在 $|w| < 1$ 内单叶，故函数

$$g(\zeta) = a_1 f(\zeta^{-1})^{-1} + \frac{1}{2} a_1 f(\zeta^{-1})^2 = \zeta + b_0 + \cdots \quad (|\zeta| > 1)$$

属于Σ. 由于第一项为奇函数，且对所有的 n 有 $a_n \geqslant 0$，故有

$$b_{2\nu+2} = \frac{1}{2} a_1 (a_1 a_{2\nu+1} + a_3 a_{2\nu-1} + \cdots) \geqslant \frac{1}{2} a_1^2 a_{2\nu+1},$$
$$(\nu = 0, 1, \cdots).$$

于是根据(24)式且因 $\beta > 0.17$ 即得到(27)式.

采用这同样方法还可给出 $g \in \Sigma$ 的法贝尔多项式 $\Phi_n(w)$ (见 3.1 节)和格隆斯基系数 b_{kl} 的一个估计. 首先回忆它们所满足的关系式(3.1.11):

$$(31) \quad \Phi_n(g(\zeta)) = \zeta^n + n \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} \zeta^{-k}, \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

定理 5.6 设 $g \in \Sigma$, $E = \mathbb{C} \backslash g(\Delta)$. 则对于某个绝对常数$K$，有

$$(32) \qquad n \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \max_{w \in E} |\Phi_n(w)| \leqslant K n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{300}}.$$

(32)式是比(26)式更强些，因为 $b_{n1} = b_n$. 由(27)与(32)式，知存在函数 $g \in \Sigma$，使得

$$(33) \qquad \max_{w \in E} |\Phi_n(w)| > n^{0.17}$$

对无限多个 n 成立.

证 由帕塞伐尔公式与(31)式知，对 $\rho > 1$,

$$\rho^{2n} + n^2 \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}|^2 \rho^{-2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_n(g(\rho e^{i\theta}))|^2 d\theta$$
$$\leqslant \max_{|\zeta| = \rho} |\Phi_n(g(\zeta))|^2.$$

令 $\rho \to 1 + 0$ 便推出(32)的前一个不等式.

再由(3.1.3)式和(29)式，当 $w\in E$，$\rho>1$ 时有

$$|\Phi_n(w)|\leqslant\frac{\rho^{n+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{g'(\rho e^{it})}{g(\rho e^{it})-w}\right|dt$$

$$\leqslant K_1\rho^{n+1}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{320}}.$$

仍取 $\rho=1+\frac{1}{n}$，便可得到(32)式的第二个不等式。

问　　题

1. 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 和 $g(z)=b_1z+\cdots$ 都在D内单叶且 $f(z)$ 从属于 $g(z)$. 试证：若对某个 $\alpha>\frac{1}{2}$，有 $b_n=O(n^{\alpha-1})$，则 $a_n=O(n^{\alpha-1})(n\to\infty)$。

2. 设 $f\in S$ 且 $f(D)$ 包含于某个角度为 $\pi\alpha$ 的扇形中，试证明，只要 $\alpha>\frac{1}{2}$则 $a_n=O(n^{\alpha-1})$.

3. 设 $f(z)$ 是如定理5.4中所构造的函数. 试证：

$$\log\frac{f(z)}{f'(0)z}=\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n\gg 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty}n^{0.49}b_n=\infty;$$

并证明对每个 $m\geqslant 2$，存在有界单叶函数满足(12)式，而且该函数为m折对称，即对 $n\not\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,m)$ 有 $a_n=0$.

4. 设 $f\in S$ 为m折对称. 试证明若 $m=2,3$，则 $a_n=O(n^{\frac{2}{m}-1})(n\to\infty)$，但若 $m\geqslant 12$，则结论一般来说不再成立。

5. 设 $f(z)$ 在D内星形且$\alpha>0$. 证明：$f(z)=O((1-|z|)^{-\alpha})(|z|\to 1-0)$ 成立当且仅当 $a_n=O(n^{\alpha-1})(n\to\infty)$ (Pommerenke 1962a).

6. 设 $f\in S$ 且 $M(r)=O((1-r)^{-\frac{1}{2}})$. 试证明：$a_n=O(n^{-\frac{1}{2}}\log n)$ (Levin 1935; 利用5.1节问题3).

7. 以 $H^p(p>0)$ 表示哈代空间. 设 f 单叶，试证明：

$$f\in H^p\Leftrightarrow\int_0^1 M(r)^p dr<\infty\Leftrightarrow\int_0^1 l(r)^p dr<\infty,$$

在第二个等价关系中要求 $p<2$ (Pommerenke 1962b; 后边一个 $\Longrightarrow$ 不是直

差能够推出的).

8. 设 $g\in\Sigma$ 且 $\operatorname{area}E=0$. 试证级数

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}nk|b_{nk}|^2,\quad (n=1,2,\cdots)$$

收敛得相当差. 说得更确切些，即证明当 n 大于某个绝对常数且 $k>n^{0.001}$ 时，余项仍大于 $\frac{1}{2}$.

9. 设 $f(z)$ 在 D 内有界单叶. 试证明：如果 $\lim\limits_{r\to1}f(r\zeta)$ 存在则 $\Sigma a_n\zeta^n(|\zeta|=1)$ 收敛(其逆当然也成立;关于进一步的陶伯尔(Tauber)定理可参见 Hayman 1970).

5.3 增长的分布

1. 我们来证实一些结论以表明：一个单叶函数不能同时在许多点太大. 其证明基于如下的引理，它是戈鲁辛不等式(3.2 节)的一个推论(Lucas 1968; Pommerenke 1967b):

引理 5.5 设 $f\in S$, $z_\nu\in D$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 且

$$(1)\qquad |f(z_1)|\geqslant|f(z_2)|\geqslant\cdots\geqslant|f(z_n)|.$$

若 $\alpha_\nu\geqslant0$, 记 $\tau_\nu=\alpha_1+\cdots+\alpha_\nu$ $(\nu=1,\cdots,n)$, 则

$$(2)\qquad \prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\nu=1}^{n}|z_\mu-z_\nu|^{\alpha_\mu\alpha_\nu}\prod_{\nu=1}^{n}|f(z_\nu)|^{\alpha_\nu^2+2\alpha_\nu\tau_{\nu-1}}$$

$$\leqslant 2^{\tau_n^2}\prod_{\nu=1}^{n}(1-|z_\nu|)^{-\alpha_\nu^2}.$$

证 应用推论 3.3 于函数 $g(\zeta)=\dfrac{1}{f(\zeta^{-1})}$. 因 $|1-z_\mu\bar{z}_\nu|\geqslant|z_\mu-z_\nu|$, 记 $|z_\nu|=r_\nu$, 我们推出

$$\prod_{\mu\neq\nu}\prod|z_\mu-z_\nu|^{\alpha_\mu\alpha_\nu}\leqslant\prod_{\mu<\nu}\prod\left(\frac{1}{|f(z_\mu)|}+\frac{1}{|f(z_\nu)|}\right)^{2\alpha_\mu\alpha_\nu}$$

$$\times\prod_{\nu}\left|\frac{z_\nu^2f'(z_\nu)}{f(z_\nu)^2(1-r_\nu^2)}\right|^{\alpha_\nu^2}$$

$$\leqslant\prod_{\mu<\nu}\prod\left|\frac{2}{f(z_\nu)}\right|^{2\alpha_\mu\alpha_\nu}\prod_{\nu}\left(\frac{1}{|f(z_\nu)|}\frac{1+r_\nu}{1-r_\nu}\frac{1}{1-r_\nu^2}\right)^{\alpha_\nu^2},$$

其中我们应用了(1)式和(1.2.13)式。这一不等式蕴含(2)式。

定理 5.7 设 $f\in S$. 若 $T_\nu\subset[0,2\pi]$, $(\nu=1,\cdots,n)$ 为 n 个互不相交的闭区间，使得

(3) $$\liminf_{r\to 1-0}(1-r)^{\alpha_\nu}M_{T_\nu}(r)>0,\quad(\nu=1,\cdots,n),$$

则

(4) $$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\leqslant 2.$$

若等号成立，则存在 $\theta_\nu\in T_\nu$，使得

(5) $$\log\left[\frac{f(z)}{z}\prod_{\nu=1}^{n}(1-e^{-i\theta_\nu}z)^{\alpha_\nu}\right]=O\left(\sqrt{\log\frac{1}{1-|z|}}\right)$$
$$(|z|\to 1-0).$$

证 (a) 对于充分大的 R，由 (3) 式，必存在 $z_\nu\in D$, $\arg z_\nu\in T_\nu$, 使得

$$R=|f(z_\nu)|\geqslant\frac{1}{B_1}(1-|z_\nu|)^{-\alpha_\nu},\quad(\nu=1,\cdots,n),$$

这里的 B_1 以及下边的 $B_2,\cdots$ 都只依赖于 α_ν, T_ν 和 f. 因这些区间 T_ν 闭且互不相交，则 $|z_\mu-z_\nu|>0$, 故由(2)式推出

$$\prod_{\nu=1}^{n}R^{\alpha_\nu^2+2\alpha_\nu\tau_{\nu-1}}\leqslant B_2\prod_{\nu=1}^{n}(1-|z_\nu|)^{-\alpha_\nu^2}$$
$$\leqslant B_3\prod_{\nu=1}^{n}R^{2\alpha_\nu}.$$

由于 $\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu^2+2\alpha_\nu\tau_{\nu-1})=\tau_n^2$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=\tau_n$, 从而由上式得到

$$\tau_n^2\log R\leqslant\log B_3+2\tau_n\log R.$$

令 $R\to\infty$, 知 $\tau_n^2\leqslant 2\tau_n$, 故 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\tau_n\leqslant 2$.

(b) 现在假定 $\tau_n=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=2$. 由(3)式，存在序列 $(z_{m\nu})$, $m=1,2,\cdots$ 使得当 $m\to\infty$ 时 $z_{m\nu}\to e^{i\theta_\nu}(\theta_\nu\in T_\nu)$ 且

(6) $$R_m=|f(z_{m\nu})|\geqslant\frac{1}{B_4(1-|z_{m\nu}|)^{\alpha_\nu}},\quad(\nu=1,\cdots,n).$$

应用戈鲁辛不等式(定理 3.3)于函数 $g(\zeta)=\frac{1}{f(\zeta^{-1})}$，置 n 为 $n+1$，取 $\gamma_\nu=\alpha_\nu$ $(\nu=1,\cdots,n)$，$\gamma_{n+1}=c\in\mathbb{C}$；$z_\nu\equiv z_{m\nu}$ $(\nu=1,\cdots,n)$，$z_{n+1}=z\in D$，即有

$$\sum_{\mu\neq\nu}\sum\alpha_\mu\alpha_\nu\log\left|\frac{f(z_\mu)^{-1}-f(z_\nu)^{-1}}{z_\mu^{-1}-z_\nu^{-1}}\right|+\sum_\nu\alpha_\nu^2\log\left|z_\nu^2\frac{f'(z_\nu)}{f(z_\nu)^2}\right|$$
$$+2\mathrm{Re}\left[c\sum_\nu\alpha_\nu\log\frac{f(z)^{-1}-f(z_\nu)^{-1}}{z^{-1}-z_\nu^{-1}}\right]+\mathrm{Re}\left[c^2\log g'(z^{-1})\right]$$
$$\geqslant\sum_{\mu\neq\nu}\sum\alpha_\mu\alpha_\nu\log|1-\bar{z}_\mu z_\nu|+\sum_\nu\alpha_\nu^2\log(1-|z_\nu|^2)$$
$$+2\mathrm{Re}\left[c\sum_\nu\alpha_\nu\log(1-\bar{z}_\nu z)\right]+|c|^2\log(1-|z|^2).$$

应用引理 5.5 的证明中的方法估计前两项，利用(3.2.5)式估计第四项；定义

$$(7)\qquad \varphi_m(z)=\tau_n\log\frac{f(z)}{z}+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\log\frac{(1-z_{m\nu}^{-1}z)(1-\bar{z}_{m\nu}z)}{1-f(z)f(z_{m\nu})^{-1}},$$

并且由(6)式及 $\tau_n=2$，我们得出

$$(8)\qquad 2\mathrm{Re}[c\varphi_m(z)]\leqslant-\tau_n^2\log R_m-2\sum_\nu\alpha_\nu^2\log(1-|z_\nu|)$$
$$-2|c|^2\log(1-|z|)+B_5\leqslant B_6-2|c|^2\log(1-|z|).$$

当 $m\to\infty$ 时 $z_{m\nu}\to e^{i\theta_\nu}$，且由(6)式知 $f(z_{m\nu})\to\infty$，故由(7)式推得

$$(9)\qquad \varphi_m(z)\to\varphi(z)=2\log\frac{f(z)}{z}+2\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\log(1-e^{-i\theta_\nu}z).$$

因此，(8)式表明：对每一 $c\in\mathbb{C}$，$z\in D$ 有

$$2\mathrm{Re}[c\varphi(z)]\leqslant B_6+2|c|^2\log\frac{1}{1-|z|}.$$

若取 $|c|=\left(\log\frac{1}{1-|z|}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\arg c=-\arg\varphi(z)$，便得到结论(5)式。

这一定理 (Spencer 1940；Pommerenke 1968a)表明：若在不

同区间中增长的联合增长率尽可能地大，则函数的增长便相当规则，即如例 2.1 那种星形函数

$$z\prod_{\nu=1}^{n}(1-e^{-i\theta_\nu}z)^{-\alpha_\nu},\ (|z|<1).$$

对于这种函数，由(5)式推知，当 $\theta\neq\theta_1,\cdots,\theta_n$ 时，对每个正数 ε 都有

(10) $$f(re^{i\theta})=O((1-r)^{-\varepsilon}),(r\to1-0).$$

其中 $n=1$ 的情形尤其有意义（参看 Hayman 1955a; Hayman and Kennedy 1958）。这时因由寇勃偏差定理可知:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(1-r)^2}{r}|f(re^{i\theta})|\right)$$

$$=\frac{(1-r)^2}{r^2}|f(re^{i\theta})|$$

$$\cdot\left(\mathrm{Re}\left[re^{i\theta}\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right]-\frac{1+r}{1-r}\right)\leqslant0,$$

并且只对寇勃函数的旋转取等号。因此，

(11) $$\beta=\lim_{r\to1-0}(1-r)^2M(r)$$

存在且满足 $0\leqslant\beta\leqslant1$，且仅对寇勃函数的旋转才有 $\beta=1$。

若 $\beta>0$，我们称 $f(z)$ 为具有**最大增长方向**的函数。定理 5.7 的证明表明，当 $\beta>0$ 时，必存在 θ_1 使得

$$|f(re^{i\theta_1})|\sim\beta(1-r)^{-2},\quad(r\to1-0),$$

而当 $\theta\neq\theta_1$，(10)式成立。

海曼 (1955a) 推得

$$\frac{|a_n|}{n}\to\beta,\quad(n\to\infty).$$

从而，除了对寇勃函数的旋转有 $|a_n|=n$ 外，都有当 $n>n_0(f)$ 时 $|a_n|<n$（见3.4 节定理 3.9 以及 Hayman 第五章）。

我们可以构造一个函数为例(参看 Brannan and Kirwan 1971)，以说明定理 5.7 至少在两点上是最佳的：(i) (3) 式中的 liminf 不能代以 limsup。(ii) (11) 式若取消 $\beta>0$ 的假设，则 $M(r)$

可以以任何不规则的方式增长。

定理 5.8 给定正连续函数 $\eta(r)$ 与 $\lambda(r)$ $(0<r<1)$ 满足

(12) $$\eta(r)\to 0,\ \lambda(r)\to+\infty,\ (r\to 1-0),$$

则存在函数 $f\in S$ 与序列 (z_n)，(ρ_n)，使得 (z_n) 的极限点在 ∂D 上稠密而 $\rho_n\to 1-0(n\to\infty)$，并且

(13) $$|f(z_n)|>\frac{\eta(|z_n|)}{(1-|z_n|)^2},\quad(n=1,2,\cdots),$$

(14) $$M(\rho_n,f)<\lambda(\rho_n),\ (n=1,2,\cdots).$$

构造这函数要根据如下一个与卡氏核定理有关的引理，这引理中关于一致性的论证可用 9.3 节的方法完成。

引理 5.6 设 $h(z)$ 在 $\overline{D}$ 单叶解析；对 $n=1,2,\cdots$，$h_n(z)$ 在 D 内单叶；$h_n(0)=h(0)=0$，$h_n'(0)>0$，$h'(0)>0$；并且对某个 θ，

$$h(D)\subset h_n(D)\subset\mathbb{C}\backslash\{h(e^{it}):|t-\theta|\geqslant\delta_n\},$$

其中 $\delta_n\to 0(n\to\infty)$。则对任一 $\varepsilon>0$，当 $n\to\infty$ 时，$h_n(z)$ 在 $D\backslash\{|z-e^{i\theta}|\geqslant\varepsilon\}$ 内一致地趋向于 $h(z)$。

定理 5.8 的证明 设 $\{\zeta_k:k=1,2,\cdots\}$ 在 ∂D 上稠密。我们按如下方法构造函数 $g_n(z)$：定义 $g_0(z)\equiv z$；假设已经构造出函数 g_n 和点 z_n，ρ_n，$n=1,2,\cdots,k$ 具有如下性质：

(i) $g_k(z)$在 $\overline{D}$ 解析单叶；

(ii) $g_k(0)=0$，$\dfrac{1}{2}<g_k'(0)<2$；

(iii) 当 $|z|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时 $|g_k(z)-g_{k-1}(z)|<2^{-k}$；

(iv) $|z_k-\zeta_k|<\dfrac{1}{k}$；

(v) $|g_k(z_n)|>2\eta(|z_n|)(1-|z_n|)^{-2}$，$(n=1,\cdots,k)$；

(vi) $M(\rho_n,g_k)<\dfrac{1}{2}\lambda(\rho_n)$，$(n=1,\cdots,k)$。

再按如下方法构造出 g_{k+1}，z_{k+1} 与 ρ_{k+1} 亦具有这些性质：设

$$C_k(\delta)=\{g_k(e^{it}):|t-\arg\zeta_{k+1}|\geqslant\delta\},\quad\left(0<\delta<\frac{\pi}{2}\right),$$

用一条与 $C_k(\delta)$ 无其它交点的半直线 L_k 将它与∞连接起来。设 $f_k(z,\delta)$ 是把 D 映照为单连通区域 $\mathbf{C}\setminus(C_k(\delta)\cup L_k)$ 的单叶函数且 $f_k(0,\delta)=0$，$f_k'(0,\delta)>0$. 于是由引理 5.6 知当 $\delta\to+0$ 时，$f_k(z,\delta)$ 在

$$\left\{z\in D,\ |z-\zeta|\geqslant\frac{1}{k+1}\right\}$$

内一致地趋向 $g_k(z)$。

由(12)式，可以选取 $\rho_k'\geqslant1-\frac{1}{n}$ 使得 $M(1,g_k)<\frac{1}{2}\lambda(\rho_k')$。取 $\delta_k>0$ 足够小以使 $f_k(z)\equiv f_k(z,\delta_k)$ 满足：

(15) $$\frac{1}{2}<f_k'(0)<2,\ |f_k(z)-g_k(z)|<2^{-k}$$

$$\left(z\in D,\ |z-\zeta_{k+1}|\geqslant\frac{1}{k+1}\right),$$

(16) $$|f_k(z)|<M(1,g_k)<\frac{1}{2}\lambda(\rho_k'),\ (|z|\leqslant\rho_k'),$$

(17) $$|f_k(z_n)|>\frac{2\eta(|z_n|)}{(1-|z_n|)^2},\ M(\rho_n,f_k)<\frac{1}{2}\lambda(\rho_n)$$

$$(n=1,2,\cdots,k)$$

(参见 (ii)，(v)，(vi))。

由于 $\mathbf{C}\setminus f_k(D)=C_k(\delta_k)\cup L_k$，容易看出在单叶函数 $f_k(z^2)^{\frac{1}{2}}$ 的映照下 D 的像包含一半平面。故从属原理(2.1 节)表明：对某个正常数 β_k 有

$$M(r,f_k)\geqslant\beta_k(1-r)^{-2},\quad\left(\frac{1}{2}<r<1\right).$$

因而由(12)式可选取 $z_k'\in D$ 使得：

(18) $$|f_k(z_k')|>2\eta(|z_k'|)(1-|z_k'|)^{-2},$$

$$|f_k(z_k')|>M(1,g_k)+1,$$

于是由(15)与(18)推出 $|z'_k - \zeta_{k+1}| < \dfrac{1}{k+1}$.

末了，我们选取 $r_k < 1$ 充分地接近于 1，使得

$g_{k+1}(z) = f_k(r_k z)$, $z_{k+1} = r_k^{-1} z'_k$, $\rho_{k+1} = r_k^{-1}\rho'_k$ 满足以 $k+1$ 代替 k 时的 (ii)—(vi)；根据(15)，(16)，(17) 及 (18)，这是可能的. 而 (i) 则显然满足. 这样就完成了我们的构造.

令 $k \to \infty$. 因为有 (ii) 知 $\{g_k(z)\}$ 局部一致有界；而由 (iii) 以及维他利定理，$g_k(z)$ 在 D 内局部一致地收敛于某个函数 $g(z)$ 且 $g(0)=0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant g'(0) \leqslant 2$. 从而由 (v) 与 (vi) 推出对所有的 n 有

$$|g(z_n)| \geqslant 2\eta(|z_n|)(1-|z_n|)^{-2},$$

$$M(\rho_n, g) \leqslant \frac{1}{2}\lambda(\rho_n).$$

这样，函数 $f(z) = g(z)/g'(0)$ 属于 S 并满足 (13) 式与 (14) 式. 而且 $\rho_n \geqslant \rho'_n \geqslant 1 - \dfrac{1}{n} \to 1$. 最后，条件 (iv) 以及 $\{\zeta_n\}$ 的选取表明，∂D 的每一点都是 $\{z_n\}$ 的极限点.

2. 我们在定理 5.7 中考虑的是“集中”增长问题。下面再讨论“分散”增长问题.

引理 5.7 设 $f \in S$. 若 $z_\nu \in D$; $0 < R \leqslant |f(z_\nu)| \leqslant M$，并且 $\alpha_\nu > 0$, $\sigma_\nu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, n)$，则

$$\prod_{\mu=1}^{n} \left| f(z_\mu) \prod_{\nu=1}^{\mu-1} (z_\mu - z_\nu)^{\alpha_\nu} \right|^{4\alpha_\mu} \tag{19}$$

$$\leqslant 2^{\sigma_n^2} M^4 R^{-(\sigma_n - 2)^2} \prod_{\mu=1}^{n} (1 - |z_\mu|)^{-2\alpha_\mu^2}.$$

证 (19)式左端可表为

$$\prod_{\mu=1}^{n} |f(z_\mu)|^{4\alpha_\mu} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} \prod_{\nu=1}^{n} |z_\mu - z_\nu|^{2\alpha_\mu \alpha_\nu},$$

故不妨设(1)式成立并应用引理5.5,知上式

$$\leqslant 2^{\tau_n^2}\prod_{\mu=1}^{n}|f(z_\mu)|^{\alpha_\mu(4-\alpha_\mu-2\tau_{\mu-1})}\prod_{\mu=1}^{n}(1-|z_\mu|)^{-2\alpha_\mu^2}.$$

因 $R\leqslant|f(z_\mu)|\leqslant M$，上式前一个乘积以

$$R^{4\tau_n-\tau_n^2}\prod_{\mu=1}^{l}\left|\frac{f(z_\mu)}{R}\right|^{4\alpha_\mu-(\alpha_\mu^2+2\alpha_\mu\tau_{\mu-1})}$$

$$\leqslant R^{-\tau_n^2+4\tau_n}\left(\frac{M}{R}\right)^{4\tau_l-\tau_l^2}$$

为界，其中 $l\leqslant n$ 是满足 $\alpha_l+2\tau_{l-1}\leqslant 4$ 的最大整数。因为 $4\tau_l-\tau_l^2\leqslant 4$ 从而推出(19)式。

定理 5.9 设 $f\in S$，$\alpha_1=1$，$\alpha_m>0$，$(m=2,3,\cdots)$，并记

(20) $$\tau_m=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu,\quad \sigma_m^2=\sum_{\mu=1}^{m}\alpha_\mu^2,\quad (m=1,2,\cdots),$$

则对于 $0\leqslant r<1$，存在 $z_m=z_m(r)$，$|z_m|=r$，使得

(21) $$|f(z)|\prod_{\mu=1}^{m}|z-z_\mu|^{\alpha_\mu}<2^{\tau_m+1}(1-r)^{-\frac{2\sigma_m^2}{\sigma_m^2+\tau_m^2}},$$

$$(|z|\leqslant r).$$

且右端不可能换成一个与 r 无关的常数。

证 (i) 若 $z_1,\cdots,z_m$ 已确定，我们选取 z_{m+1} 使得

(22) $$M_{m+1}\equiv\max_{|z|=r}\left|f(z)\prod_{\mu=1}^{m}(z-z_\mu)^{\alpha_\mu}\right|$$

$$=\left|f(z_{m+1})\prod_{\mu=1}^{m}(z_{m+1}-z_\mu)^{\alpha_\mu}\right|.$$

则 $|z_{m+1}|=r$。从而对于 $1\leqslant\mu\leqslant m$ 有

(23) $$M_{m+1}\leqslant 2^{\tau_m-\tau_\mu}|f(z_{m+1})(z_{m+1}-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z_{m+1}-z_\mu)^{\alpha_\mu}|$$

$$\leqslant 2^{\tau_m-\tau_\mu}M_{\mu+1}.$$

现假定(21)式对某个 m 不成立。我们简记

(24) $$\sigma=\sigma_m,\quad \tau=\tau_m,\quad R=2(1-r)^{-\frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}},$$

则从(22)式推出 $M_{m+1} \geqslant 2^{\tau}R$。于是由(23)结合(22)有

$$(25)\qquad R \leqslant 2^{-\tau}M_{m+1} \leqslant 2^{-\tau_{\mu-1}}M_{\mu} \leqslant |f(z_{\mu})|,$$
$$(\mu = 2, \cdots, m+1).$$

由于 $\alpha_1 = 1$，再置 $\alpha > 0$，由(22)式有

$$R^{4\alpha}M_1^4R^{4(\tau-1)} < M_{m+1}^{4\alpha}\prod_{\mu=1}^{m}M_{\mu}^{4\alpha_{\mu}}$$

$$(26)\qquad = \prod_{\mu=1}^{m}\left|f(z_{\mu})\prod_{\nu=1}^{\mu-1}(z_{\mu}-z_{\nu})^{\alpha_{\nu}}\right|^{4\alpha_{\mu}}\left|f(z_{m+1})\prod_{\mu=1}^{m}(z_{m+1}-z_{\mu})^{\alpha_{\mu}}\right|^{4\alpha}.$$

在(22)中取 $m=0$ 有 $M_1 \geqslant |f(z_{\mu})|$。故由引理 5.7(取 $n=m+1$)和(25)式，知最后一个表达式

$$\leqslant 2^{(\tau+\alpha)^2}M_1^4R^{-(\tau+\alpha-2)^2}(1-r)^{-2\sigma^2-2\alpha^2},$$

故由(26)式推出

$$R^{(\tau+\alpha)^2} < 2^{(\tau+\alpha)^2}(1-r)^{-2\sigma^2-2\alpha^2}.$$

选取 $\alpha = \dfrac{\sigma^2}{\tau}$，便得到与(24)式相矛盾的结果。

(b) 最后假定(21)式右端可换成一个与 r 无关的常数。因对于某个序列 (r_{ν})，$r_{\nu} \to 1(\nu \to \infty)$，可假设点 $z_1(r_{\nu}), \cdots, z_m(r_{\nu})$ 收敛于 $\zeta_1, \cdots, \zeta_m \in \partial D$。这便推出

$$|f(z)|\prod_{\mu=1}^{m}|z-\zeta_{\mu}|^{\alpha_{\mu}} < \text{const}, (|z| < 1).$$

这一结果对于定理 5.8 中的函数是不成立的，因为由(13)式 (z_n) 的极限点在 ∂D 上稠密。

推论 5.1 设 $f \in S$，则对于 $0 \leqslant r < 1$，存在点 $z_m = z_m(r)$，$|z_m| = r(m = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$(27)\qquad \left|f(z)\prod_{\mu=1}^{m}(z-z_{\mu})\right| < 2^{m+1}(1-r)^{-\frac{2}{m+1}}, \ (|z| \leqslant r).$$

这一结果可立即从定理 5.9 取 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1$ 的情形推出。函数

$$f(z) = z(1-z^{m+1})^{-\frac{2}{m+1}}$$

表明指数 $-\dfrac{2}{m+1}$ 是最佳的。

下面我们再来证明一个关于系数线性组合的估计 (Pommerenke 1967a):

定理 5.10 设 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\in S$, 则对 $n=2,3,\cdots$, 存在复数 $c_{nk}(k=0,1,\cdots,1000)$, $c_{n0}=1$, $|c_{nk}|\leqslant K_1$, 使得对每个 $\delta>0$

$$(28)\qquad \left|\sum_{k=0}^{1000}c_{nk}a_{\nu+k}\right|<\delta^{-1}K_2n^{-0.491},\quad (\delta n<\nu\leqslant n),$$

其中 K_1, K_2 是绝对常数.

证 由推论 5.1 取 $m=1000$, $r_n=1-\dfrac{1}{n}$, 知对 $n=2$, $3,\cdots$ 存在多项式

$$(29)\qquad p_n(z)=\prod_{\nu=1}^{m}(z-z_{\nu n})=\sum_{k=0}^{m}c_{nk}z^{m-k}$$

使得

$$(30)\qquad |p_n(z)f(z)|\leqslant K_3n^{0.012}\quad (|z|\leqslant r_n).$$

故由定理 5.2(5.1 节)推出对 $z=re^{i\theta}$ 有

$$(31)\qquad \int_0^{2\pi}|p_n(z)f'(z)|d\theta\leqslant K_3n^{0.012}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|d\theta$$

$$\leqslant K_4n^{0.012}(1-r_n)^{-0.497}=K_4n^{0.509}.$$

其次,从(1.2.12)式,(29)式和(30)式又得到当 $|z|=r_n$,

$$|p_n'(z)f(z)|=|p_n'f|^{0.1}|p_nf|^{0.9}\left|\frac{p_n'}{p_n}\right|^{0.9}$$

$$\leqslant K_5n^{0.2}n^{0.1}\left|\frac{p_n'}{p_n}\right|^{0.9},$$

因而

$$\int_0^{2\pi}|p_n'(z)f(z)|d\theta\leqslant K_5n^{0.3}\int_0^{2\pi}\left|\frac{p_n'(z)}{p_n(z)}\right|^{0.9}d\theta$$

$$\leqslant K_5n^{0.3}\int_0^{2\pi}|re^{it}-1|^{-0.9}dt<K_6n^{0.3}.$$

令 $h_n(z)=p_n(z)f(z)$，则由上述估计式及(31)式推出对 $z=r_ne^{i\theta}$ 有

$$\int_0^{2\pi}|h_n'(z)|d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}(|p_nf'|+|p_n'f|)d\theta\leqslant K_9n^{0.499}.$$

因此，当 $\nu\leqslant n$ 时有

$$(32)\qquad (m+\nu)\left|\sum_{k=0}^{m}c_{nk}a_{n+k}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{h_n'(z)}{z^{m+\nu-1}}d\theta\right|\leqslant K_{10}n^{0.499},$$

此式直接推出(28)式。

当然，常数 1000 和 0.501 并不是最佳的。求系数组合增长的精确阶问题是一个尚未解决的问题，一些进一步结果可参看 Pommerenke 1967a 和 Lucas 1969。一个与此有关的问题是亨克尔（Hankel）行列式 $\det(a_{n-\mu+\nu})_{\mu,\nu=1,\cdots,p}$ 的估计（参看 Hayman 1968 和 Pommerenke 1967b）。

以上这些结果可作如下解释：单叶函数的系数增长取决于：(*i*) 函数的增长，即像域的“大小”及 (*ii*) 像域边界的复杂性．看来，如推论 5.1 所表明的那样，函数的增长是在那些可以依赖于 r 的类极点处（*Polelike places*）引起的。这方面我们可以通过取系数的适当线性组合来尽量减小其影响直到使之接近有界单叶函数的系数增长阶（见定理 5.3）。但这一方法却不能减弱因素 (ii) 的影响。对于星形函数，(ii) 的影响就弱得多，并且可以证明 (Pommerenke 1966)，对 $m=1,2,\cdots$，存在 $c_k(k=0,\cdots,m)$，使得

$$\left|\sum_{k=0}^{m}c_ka_{n+k}\right|\leqslant K(m)n^{\frac{2}{m+1}-1},\quad(n=1,2,\cdots).$$

问　　题

1. 设 $\zeta\in\partial D$．当 z 沿着某条以 ζ 为端点的曲线趋于 ζ 时，令 $\alpha(\zeta)$ 是对每个 $\varepsilon>0$ 满足

$$|f(z)|>\beta(\varepsilon)(1-|z|)^{-\alpha(\zeta)+\varepsilon}$$

的最大数．试证明：若 $f\in S$，则 $\alpha(\zeta)=0$．可能有可数多个 ζ 例外并且对这些 ζ 有 $\Sigma\alpha(\zeta)\leqslant 2$ (Spencer 1940)。

2.设 $f\in S$，$\tau>1$，$\varepsilon>0$。试证明存在 m 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，$\alpha_1+\cdots+\alpha_m=\tau$，使得对于适当的 $z_1(r)$，$z_2(r)\cdots$，$z_m(r)$，$(0\leqslant r<1)$ 满足．

$$\left|f(z)\prod_{\mu=1}^{m}(z-z_\mu)^{\alpha_\mu}\right|\leqslant 2^{\tau+1}(1-r)^{-\frac{2}{\tau^2+1}-\varepsilon}\quad(|z|\leqslant r).$$

并证明即使 m 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可依赖于 r，上式右端也不能易为与 r 无关的常数。

3.设 $f\in S$，$0\leqslant r<1$。试将定理 5.9 的证明加以修改以证明存在 $z_\mu=z_\mu(r)(\mu=1,2,\cdots)$，$|z_\mu|=1$，使得

$$(1-|z|)^{\frac{1}{2}}\left|f(z)\sum_{\mu=1}^{m}(z-z_\mu)\right|\leqslant K(m)\,(1-r)^{-\frac{2}{(m+1)^2}},$$

$$(|z|\leqslant r),$$

其中 $K(m)$ 只依赖于 m(Pommerenke 1967a)。

4.设 $f\in S$，$m=1,2,\cdots$。试由题 3 导出：对于 $n=1,2,\cdots$，存在 $c_{nk}(k=0,\cdots,m)$，$c_{n0}=1$，$|c_{nk}|\leqslant 2^m$，使得对于每个 $\varepsilon>0$，

$$\left|\sum_{k=0}^{m}c_{nk}a_{n+k}\right|\leqslant K(m,\varepsilon)n^{\frac{1}{(m+1)^2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

5.4 缺项级数

现在来研究形如

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}z^{n_k},\quad(|z|<1)$$

的单叶函数。我们将会看到，大体上说，间断若大（意指 (n_k) 增大快）则系数就小。下面我们考虑几种间断条件．以 $K,K_1,\cdots$ 表示绝对常数，以 $K(\cdot),\cdots$ 等表示仅依赖于所标出之参数的常数。

海曼(1963)的结果：对 $f\in S$，有

$$||a_{n+1}|-|a_n||<K,\quad(n=1,2,\cdots)$$

(见定理 3.10)，它概括了间断很少的情形。由此可得，对于一个

满足 $0 < \nu_{k+1} - \nu_k \leqslant l$ 的序列 (ν_k) 若有 $a_{\nu_k} = 0$ 时，则 $|a_n| \leqslant Kl$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 已知的一个例子是

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{l}}{\sin \frac{\pi}{l}} z^n$$

(见例 1,4). 它当 $n = kl$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 时，$a_n = 0$；并且若 l 为充分大的偶数，则当 $n = 2kl + \frac{1}{2}l$ 时

$$a_n = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{l}} \approx \frac{l}{\pi}.$$

单叶函数

$$(3) \qquad f(z) = \frac{z}{(1 - z^m)^{\frac{2}{m}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{m} + k - 1}{k} z^{mk+1}$$

$$(|z| < 1)$$

以(1)式记法满足 $n_{k+1} - n_k = m$. 而事实上，这个函数还是具有这种间断情形的函数类的一个极值函数。就如下述海曼的结果(Hayman 1967)所表明的.

定理 5.11 设 $f \in S$ 具有展开式(1)，并且满足

$$(4) \qquad n_{k+1} - n_k \geqslant m, \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

其中 m 是大于 1 的某个自然数. 则

$$(5) \qquad M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant K(m)(1 - r)^{-\frac{2}{m}}$$

$$\left(\frac{1}{2} \leqslant r < 1\right).$$

由此对于 $n = 1, 2, \cdots$，就有

$$(6) \qquad |a_n| < Kn^{-\frac{1}{3}}, \qquad 当\ m = 3,$$

$$(7) \qquad |a_n| < Kn^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{1500}}, \quad 当\ m \geqslant 5.$$

函数(3)满足 $a_n \sim \text{const} \cdot n^{\frac{2}{m} - 1}$ $(n = n_k \to \infty)$. 因此(6)式

是最佳的．(7)式中指数不能改为 $-\frac{2}{m}+1$，至少对 $m\geqslant 12$ 是这样(见 5.2 节问题 3)．

我们要引用茵格姆（Ingham）的如下结果而不加证明：设

$$\varphi(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{in_k\theta},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|b_k|<\infty, \tag{8}$$

其中 (n_k) 对于某个 $m=2,3,\cdots$ 满足(4)式．则对于每个长度 $\geqslant \frac{2\pi+\varepsilon}{m}$ $(\varepsilon>0)$ 的区间 T，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2\leqslant K_0(\varepsilon)\int_T|\varphi(\theta)|^2d\theta. \tag{9}$$

定理 5.11 的证明 设 $\frac{1}{2}\leqslant r<1$，取 $z_1=re^{i\theta_1}$ 使得 $|f(re^{i\theta_1})|=M(r)$．对 $\mu=2,\cdots,m$，定义

$$T_\mu=\left[\theta_1+\frac{2\pi(\mu-2)}{m-1}+\delta,\quad \theta_1+\frac{2\pi(\mu-1)}{m-1}-\delta\right],$$

$$\delta=\frac{\pi}{2m(m-1)}.$$

其中任何两个区间之间以及任何区间到 θ_1 的距离都不小于 δ，且有

$$\text{Length } T_\mu=\frac{2\pi}{m-1}-2\delta=\frac{\pi(2m-1)}{m(m-1)} >\frac{2\pi}{m}\quad(\mu=2,\cdots,m). \tag{10}$$

再选取 $z_\mu=re^{i\theta_\mu}$，$\theta_\mu\in T_\mu$ $(\mu=2,\cdots,m)$，并使得

$$|f(z_\mu)|=\max_{\theta\in T_\mu}|f(re^{i\theta})|, \tag{11}$$

因当 $\mu,\nu=1,\cdots,m$ 且 $\mu\neq\nu$ 时有

$$|z_\mu-z_\nu|\geqslant 2r\sin\frac{\delta}{2}\geqslant\sin\frac{\delta}{2},$$

从而由引理 5.5 (5.3 节) 取 $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=\frac{1}{m}$ 得到

(12) $$\min_{1\leqslant\mu\leqslant m}|f(z_\mu)|\leqslant K_1(m)(1-r)^{-\frac{2}{m}}.$$

由于 $|f(z_1)|=M(r)$，故这个最小值对某个 $\mu>1$ 达到。往下我们即保持这个 μ 固定。应用英格姆 (Ingham) 定理于 $\varphi(\theta)=f'(re^{i\theta})$，由(9)式与(10)式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2|a_n|^2r^{2n-2}\leqslant K_2(m)\int_{T_\mu}|f'(re^{i\theta})|^2d\theta,$$

而由引理 5.2 (取 $\lambda=2$) 及(11)与(12)式，上式右端

$$\leqslant K_3(m)(1-r)^{-1}|f(z_\mu)|^2\leqslant K_4(m)(1-r)^{-1-\frac{4}{m}}.$$

故由薛瓦尔兹不等式有

$$|f'(re^{i\theta})|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2|a_n|^2r^{n-1}\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant K_5(m)(1-r)^{-1-\frac{2}{m}},$$

关于 r 积分上式便得到(5)式。再由定理5.3可从(5)式推出(6)与(7)式。

在一个从整体说来是较强的间断条件下，我们还能够证明 (Pommerenke 1962b)：

定理 5.12 设 $f\in S$ 具有展开式(1)且满足

(13) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}<\infty,$$

则 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 连续且

(14) $$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|<\infty.$$

证 令

$$P(r)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|r^{n_k},\quad(0\leqslant r<1).$$

则由薛瓦尔兹不等式，对于 $m=1,2,\cdots,$

(15) $$P(r)\leqslant\sum_{k=1}^{m}|a_{n_k}|+\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{k=m+1}^{\infty}n_k|a_{n_k}|^2r^{2n_k}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因 $f(z)$ 单叶且 $M(r)\leqslant P(r)$，故有

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k|a_{n_k}|^2 r^{2n_k}=\frac{1}{\pi}\text{area}\{f(z):|z|\leqslant r\}$$
$$\leqslant M(r)^2\leqslant P(r)^2.$$

选取 m 充分大则可由(15)式得到

$$P(r)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|+\frac{1}{2}P(r),\quad(0\leqslant r<1).$$

从而便有 $P(1)=\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|<\infty$ 即(14)式的结论。

根据定理 5.3，我们从定理 5.12 可直接推出：对于这类函数有 $a_n=O(n^{-0.503})$。须知间断条件(13)只是一种全体项数的密度条件，它并不排除留下的项指标 n_k 形成密集的可能性；在 6.3 节定理 6.9 中还可证明，任何一种密度条件都不可能导出 $a_n=O(n^{-\varepsilon})$.

但若我们引入更强的哈达玛间断条件，即对某个 λ 与 l，

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1,\quad(k>l),\tag{16}$$

则可以证明 (Pommerenke 1964b; Fuchs 1957)：

定理 5.13 若 $f\in S$ 具有哈达玛间断，则

$$a_n=o(n^{-1}),\quad(n\to\infty).\tag{17}$$

我们将看到，只需假定对 $z\in D$，$f'(z)\neq 0$ 就可以推出这一结论。其证明是根据费叶与斐开特的如下结果 (Fejer and Fekete 1923a)：

引理 5.8 设 $0=m_1<m_2<\cdots$，若

$$g(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^{m_k},\quad\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{m_k}<\infty\tag{18}$$

在 D 内解析且无零点，则对 $j=1,2,\cdots$，多项式

$$g_j(z)=\sum_{k=1}^{j}\sigma_{jk}b_k z^{m_k},\quad\sigma_{jk}=\prod_{\mu=j+1}^{\infty}\left(1-\frac{m_k}{m_\mu}\right)\tag{19}$$

在 D 内也无零点。

证　令 ρ_j 为 $g_j(z)$ 的最小零点的模，我们是要证明 $\rho_j \geqslant 1$. 因多项式

$$z^{m_j} g_j(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{j} \sigma_{jk} b_k z^{m_j - m_k}$$

的所有零点都在 $\{|z| \leqslant \rho_j^{-1}\}$ 内，故由卢卡斯 (Lucas) 定理 (Marden 14 页)，其导函数

$$\sum_{k=1}^{j-1} (m_j - m_k) \sigma_{jk} b_k z^{m_j - m_k - 1}$$

$$= m_j z^{m_j - m_{j-1} - 1} \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{j-1,k} b_k z^{m_{j-1} - m_k}$$

的所有零点也在 $\{|z| \leqslant \rho_j^{-1}\}$ 内；因此 $z^{m_{j-1}} g_{j-1}(z^{-1})$ 的所有零点都在 $\{|z| \leqslant \rho_j^{-1}\}$ 内. 从而 $\rho_{j-1} \geqslant \rho_j$. 由(19)式知，当 $j \to \infty$ 时 $g_j(z)$ 在 D 内局部一致地收敛于 $g(z)$. 由于当 $z \in D$, $g(z) \neq 0$, 故得出 $\rho_j \geqslant \lim\limits_{\nu \to \infty} \rho_\nu \geqslant 1$.

定理 5.13 的证明　域 $G' = \{f'(z): z \in D\} \neq \mathbf{C}$, 因为 $0 \notin G'$. 设 $w_1 \in \partial G'$, 令

$$g(z) = f'(z) - w_1 = -w_1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{n_k - 1}, \tag{20}$$

$$b_k = n_k a_{n_k},$$

则当 $z \in D$ 时 $g(z) \neq 0$. 按(19)式定义 $g_j(z)$ 并记

$$g_j^*(z) = z^{m_j+1} \overline{g_j}(z^{-1}) = \sigma_{jj} \bar{b}_j + \sigma_{j,j-1} \bar{b}_{j-1} z^{n_j - n_{j-1}} + \cdots, \tag{21}$$

由引理 5.8 知当 $z \in D$ 时 $g_j(z) \neq 0$, 故函数 $h_j(z) = \dfrac{g_j^*(z)}{g_j(z)}$ 在 D 内解析. 由于当 $|z| = 1$ 有 $|h_j(z)| = 1$, 故当 $z \in D$, $|h_j(z)| \leqslant 1$.

现假定(17)式不成立，即当 $k \to \infty$ 时，$b_k = n_k a_{n_k}$ 不趋于零，比如说设 $|b_{j_\nu}| \geqslant \beta > 0$ $(j_\nu \to \infty)$. 由蒙代尔定理不妨设 $\nu \to \infty$ 时，$h_{j_\nu}(z)$ 在 D 内局部一致地趋于 $h(z)$，其中 $|h(z)| \leqslant 1$. 从而，

(22) $$g^*_{j_\nu}(z) = g_{j_\nu}(z)h_{j_\nu}(z) \to g(z)h(z) \quad (\nu \to \infty)$$

在D内局部一致。由于 $n_j - n_{j-1} \to \infty$，从(21)式我们断定 $g(z)h(z) = c$。间断条件(16)蕴含 $n_\mu - 1 \geqslant \lambda^{\mu-j}(n_j - 1)$，($\mu \geqslant j > l$)，因此可从(21)式与(19)式得出，对 $j_\nu > l$ 有

$$|g^*_{j_\nu}(0)| = |b_{j_\nu}|\sigma_{j_\nu} \geqslant \beta \prod_{\mu=j_\nu+1}^{\infty}\left(1 - \frac{n_{j_\nu} - 1}{n_\mu - 1}\right)$$

$$\geqslant \beta \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\lambda^k}\right) > 0,$$

故 $c \neq 0$。再由(20)式有

$$0 < |c| = |f'(z) - w_1||h(z)| \leqslant |f'(z) - w_1|, \quad (z \in D),$$

这就与 $w_1 \in \partial G'$ 的选取矛盾。

现在我们来说明，对于单叶函数，无论怎样强的间断条件都不可能导致比 $a_n = o(n^{-1})$ 更强的结果。事实上，设 (n_k) 为任一递增序列，并设 ε_n 任意缓慢地趋于零。通过对 (n_k) 的删减，我们总可以假定 $\varepsilon_{n_k} < 2^{-k}$ 从而 $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{n_k} < 1$。于是由例 2.2 知函数

(23) $$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} n_k^{-1}\varepsilon_{n_k} z^{n_k}$$

属于 S。

M. 魏斯和 G. 魏斯 (M. and G. Weiss 1963) 已证明，存在数 λ_0 具有如下性质：若

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{m_k} \neq 0, \quad (|z| < 1),$$

并且对某个 $\lambda > \lambda_0$ 有 $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geqslant \lambda$，则 $\sum|b_k| < \infty$。由于对单叶函数有 $f'(z) \neq 0$，故可推出：若在(16)式中 $\lambda > \lambda_0$，则

(24) $$\sum_{k=1}^{\infty} n_k |a_{n_k}| < \infty.$$

这一结论当然强于(17)式，但不知是否有 $\lambda_0=1$.

还不知道证明 $a_n=o(n^{-1})$ 是否一定需要有如哈达玛条件(16) 那样强的间断条件. 事实上，我们也并不知道任何一个具有间断 $n_{k+1}-n_k\to\infty(k\to\infty)$ ("强法勃利 (Fabry) 间断")的单叶函数有 $a_n\neq o(n^{-1})$。

问　　题

1. 设 $f\in S$ 且对 $\nu_k\leqslant n\leqslant\nu_k+1000(k=1,2,\cdots)$有 $a_n=0$. 其中(ν_k)对某个固定的 l 满足 $0<\nu_{k+1}-\nu_k\leqslant l$. 试由定理 5.10 导出 $a_n=O(n^{-0.001})$. $(n\to\infty)$。

2. 设 $f\in S$ 具有展开式 (1). 以 $N(x)$ 表示 $n_k\leqslant x$ 的指标个数. 试利用定理 5.12 证明中的方法证明：对每个 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}=0\Longrightarrow M(r)=O\left(\frac{1}{(1-r)^{\varepsilon}}\right),\quad(r\to1)$$

(这种间断为"弱法勃利间断"). 并利用(2.2.11)式证明：若$f(z)$ 星形，则对每个 $\varepsilon>0$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{N(x)}{x}\leqslant\beta\Longrightarrow a_n=O(n^{2\beta-1+\varepsilon}),\quad(n\to\infty).$$

再证明若 $\beta=\frac{1}{m}$ $(m=1,2,\cdots)$, 则 $2\beta-1$ 不能易为更小的数.

3. 设 p 是整数，$\frac{n_{k+1}}{n_k}\geqslant\lambda>1$. 且设

$$f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}z^{n_k}+\cdots+a_{n_k+p}z^{n_k+p})\in S.$$

试证 $na_n\to0$ $(n\to\infty)$ (Pommerenke 1964b).

4. 函数

$$f_1(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{k^2+k+1}z^{k^2+k+1},$$

$$f_2(z)=z+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}z^{k^2+1}$$

具有强法勃利间断. 试证两个函数在 D 内都非单叶，虽然它们的导函数在 D 内均无零点(对 $f_1(z)$ 用定理 5.12; 对 $\log f'(z)$ 的幂级数展开式应用 1.2 节问题 9; 参看 Riordan 183 页，187 页)。

5. 设 $\rho_k \to 1-0$, $m_k \to \infty$ 及 $p_k \to \infty$ 迅速，试证:

$$\operatorname{Re}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(1+2 \sum_{\mu=1}^{p_k} \rho_k^{\mu} z^{\mu m_k}\right)\right]>0 \quad (|z|<1).$$

并证明若 $\frac{n_{k+1}}{n_k} \to 1$ (无论多么慢)，总存在一个形如 (1) 式的单叶函数使得 $\Sigma n_k |a_{n_k}| = \infty$.

第六章　单叶函数与微分方程

6.1 娄威纳微分方程

本节介绍由娄威纳（1923）首先提出并为库法列夫（Kufarev 1943）所发展的一种研究单叶函数的方法（也可参看 Pommerenke 1965b; G. S. Goodman 1968）. 其基本思想是将函数的象域嵌入一个连续递增区域族中，这个区域族可以用一个微分方程来描述. 这个方法的讨论要联系到从属关系与正实部函数特别是解析函数类 $\mathscr{P}$:

$$p(z)=1+c_1z+\cdots(|z|<1),\ \operatorname{Re}p(z)>0$$

（见 2.1 节）. 本节还要用到勒贝格理论.

设 $G(\tau)$ $(0\leqslant\tau<+\infty)$ 是一个满足如下条件的单连通区域族:

(1)　　$0\in G(\sigma)\subsetneqq G(\tau)\quad(0\leqslant\sigma<\tau<+\infty)$;

(2)　　当 $n\to\infty$ 时,按核收敛意义(见 1.4 节)有

$$G(\tau_n)\to G(\tau_0),\ \text{当}\ \tau_n\to\tau_0<+\infty\ \text{时},$$
$$G(\tau_n)\to\mathbf{C},\quad \text{当}\ \tau_n\to+\infty\ \text{时}.$$

设单叶函数 $f(z,\tau)$ $(0\leqslant\tau<+\infty)$ 把 $D=\{|z|<1\}$ 映照为 $G(\tau)$ 并使得

$$f(0,\tau)=0,\ f'(0,\tau)>0,$$

其中 $f'(z,\tau)$ 表示关于 z 的导数. (1)式表明:

$$f(z,\sigma)\prec f(z,\tau),\quad(0\leqslant\sigma<\tau<+\infty),$$

记号"$\prec$"表从属关系. 因此 $a_1(\tau)=f'(0,\tau)$ 是严格递增函数. 因若不然，则可由黎曼定理的唯一性部分推出对某个 $\sigma<\tau$ 有 $G(\sigma)=G(\tau)$ 而与(1)式矛盾. 卡氏核定理（定理 1.8）与(2)式表明 $a_1(\tau)$在 $0\leqslant\tau<+\infty$ 连续，且当 $\tau\to+\infty$ 时，$a_1(\tau)\to+\infty$. 因此我们可用 $e^t=a_1(\tau)$ 引进新参数 t 而有

$$f^*(z,t)\equiv f(z,\tau)=e^t z+\cdots,\ (0\leqslant t<+\infty).$$

例 6.1 设 $J: w(\tau)$，$(0\leqslant\tau\leqslant+\infty)$ 是从 $w(0)$ 到∞的一条若当弧，$0\notin J$. 则单连通区域族：

$$G(\tau)=\mathbb{C}\setminus J(\tau),\quad (0\leqslant\tau<+\infty)$$

满足条件(1)和(2)，其中 $J(\tau)$ 表示若当弧 $w(\sigma)$，$\tau\leqslant\sigma\leqslant+\infty$.

如果对每个 $t\in[0,+\infty)$，函数

(3) $$f(z,t)=e^t z+a_2(t)z^2+\cdots,\ (|z|<1)$$

在D内解析单叶且

(4) $$f(z,s)\prec f(z,t),\quad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty),$$

则称 $f(z,t)$ 为一个娄威纳链. 其中从属条件意味着：

(5) $$f(z,s)=f(\varphi(z,s,t),t),\quad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty),$$

而 $\varphi(z,s,t)$ 在 $|z|<1$ 内单叶并满足

$$|\varphi(z,s,t)|\leqslant|z|.$$

由标准式(3)我们有

(6) $$\varphi(z,s,t)=e^{s-t}z+\cdots,\quad (z\in D).$$

因 $f'(0,t)\neq0$，函数 $\varphi(z,s,t)$ 由(5)式唯一确定. 因此从(5)式推出

(7) $$\varphi(z,s,\tau)=\varphi[\varphi(z,s,t),t,\tau],$$
$$(0\leqslant s\leqslant t\leqslant\tau<\infty).$$

娄威纳把这一半群性质作为他的理论的出发点.

我们已经看到，对每个满足条件(1)和(2)的区域族 $G(\tau)$，都可以与一个娄威纳链相联系. 反过来，设 $f(z,t)$ 是一个娄威纳链，且定义 $G(t)=f(D,t)$，则由(3)式与(4)式知 $G(t)$ 满足条件(1). 又由(3)式知 $e^{-t}f(z,t)\in S$，应用寇勃偏差定理得到

(8) $$e^t\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z,t)|\leqslant e^t\frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

$$|f'(z,t)|\leqslant e^t\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

于是若 $t_n\to+\infty$ 则 $G(t_n)\to\mathbb{C}$; 而条件(2)的另一部分，即若

$t_n \to t_0 < +\infty$ 则 $G(t_n) \to G(t_0)$，可以根据下边这个引理以及卡氏核定理直接推出.

引理 6.1 若 $f(z,t)$ 是一个娄威纳链，则对 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u < +\infty$，有

(9) $$|f(z,t)-f(z,s)| \leqslant \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t-e^s), \quad (|z|<1),$$

(10) $$|\varphi(z,t,u)-\varphi(z,s,u)| \leqslant \frac{2|z|}{(1-|z|)^2}(1-e^{s-t}), \quad (|z|<1),$$

证 因当 $s<t$，有 $|\varphi(z,s,t)|<|z|$ 而知

(11) $$p(z,s,t)=\frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}}\frac{1-z^{-1}\varphi(z,s,t)}{1+z^{-1}\varphi(z,s,t)}$$

在D内具有正实部且由（6）式它属于 $\mathscr{P}$. 又因由（2.1.11）式有 $|p(z,s,t)| \leqslant (1+|z|)/(1-|z|)$，于是由(11)式推出

$$|z-\varphi(z,s,t)| \leqslant 2|z|\frac{1+|z|}{1-|z|}(1-e^{s-t}).$$

由(8)式我们有 $|f'(\zeta,t)| \leqslant 2e^t(1-|\zeta|)^{-3}$，故从(5)式得出

$$|f(z,t)-f(z,s)| = \left|\int_{\varphi(z,s,t)}^{z} f'(\zeta,t)d\zeta\right|$$

$$\leqslant |z-\varphi(z,s,t)|\frac{2e^t}{(1-r)^3} \leqslant \frac{8r}{(1-r)^4}(e^t-e^s).$$

这就证明了（9）式. 又因当 $|\zeta| \leqslant r$ 时有 $|\varphi'(\zeta,t,u)| \leqslant \frac{1}{1-r^2}$，于是可依同样方法从(7)式推出（10）式.

我们的下一个定理要证明，任一个单叶函数都能够嵌入一个娄威纳链中. 为此，先证明娄威纳链的空间是紧的.

引理 6.2 任一个娄威纳链序列 $f_n(z,t)$ 必含有子列收敛于娄威纳链，并且对于任何固定的 $t \geqslant 0$ 这个子列在D内局部一致收敛.

证 由引理 6.1 推出函数 $f_n(z,t)(n=1,2,\cdots)$在 $\{(z,t):$

$|z| < 1 - \frac{1}{m},\ 0 \leqslant t \leqslant m\}$ 上等度连续．则反复应用阿尔采拉-阿斯古力（Arzela-Ascoli）定理（Roycen．179 页）知，存在子序列 $f_{n_\nu}(z, t)$ 在 $\{|z| < 1,\ 0 \leqslant t < +\infty\}$ 内逐点收敛，并且对任何固定的 $t \geqslant 0$ 这个子序列在D内局部一致收敛，这后一断语可由(8) 式和维他利（Vitali）定理推出．从而极限函数 $f(z, t)$ 在D内满足(3)式且亦为单叶．而且，对 $0 \leqslant s \leqslant t < +\infty$，有

(12) $\quad f_{n_\nu}(z, s) = f_{n_\nu}(\varphi_{n_\nu}(z, s, t), t), \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$

又由蒙代尔定理存在 (n_ν) 的子列 (n'_ν) 使得 $\varphi_{n'_\nu}(z, s, t)$ 在 D 内局部一致收敛于某个函数 $\varphi(z, s, t)$ 满足 $|\varphi(z, s, t)| \leqslant |z|$．在(12)式中通过这一子列取极限便得到(5)式，故 $f(z, t)$ 为娄威纳链．

定理 6.1 对任何一个函数$f \in S$，都存在一个娄威纳链$f(z, t)$使得 $f(z) = f(z, 0)$．

证 设 $r_n = 1 - \frac{1}{n}$．函数 $r_n^{-1} f(r_n z)$ 把 $|z| < 1$ 映照成由一条解析若当曲线 C_n 界成的区域 G_n．根据若当曲线定理，G_n 的外区域 H_n 必满足 $\partial H_n = C_n$．设单叶函数 $g_n(\zeta)$ 把 $|\zeta| > 1$ 映照成 H_n 并使得 $g_n(\infty) = \infty$．考虑解析若当曲线 $C_n(\tau) = \{g_n(\zeta): |\zeta| = e^\tau\}$ $(\tau > 0)$ 的内区域 $G_n(\tau)$，且置 $G_n(0) = G_n$．因为，对固定的 n，当 $\tau \to 0$ 时，$G_n(\tau) \to \partial H_n = C_n$，故区域族 $G_n(\tau)$ $(0 \leqslant \tau < \infty)$ 满足(1)和(2)，其相应的娄威纳链 $f_n(z, t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 满足 $f_n(z, 0) = r_n^{-1} f(r_n z)$，并且由引理 6.2，它的某个子列收敛于一个娄威纳链 $f(z, t)$且满足 $f(z, 0) = f(z)$．

现在我们来讨论娄威纳理论的主要结果．记

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

定理 6.2 函数 $f(z, t)$ 为一个娄威纳链当且仅当下列两条件满足：

(i) 函数 $f(z,t)=e^t z+\cdots$ 对每个 $t\geqslant 0$ 在 $|z|<r_0$ 内解析，对每个 $z\in\{|z|<r_0\}$ 关于 $t\geqslant 0$ 为绝对连续. 并且对某两个正常数 K_1 和 r_0 满足

(13) $$|f(z,t)|\leqslant K_1 e^t,\ (|z|<r_0,\ t\geqslant 0).$$

(ii) 存在函数 $p(z,t)$ 在 $|z|<1$ 内解析，关于 $t\geqslant 0$ 可测且满足 $\mathrm{Re}\,p(z,t)>0$ $(|z|<1,0\leqslant t<\infty)$，使得对几乎所有的 t，有

(14) $$\dot f(z,t)=zf'(z,t)p(z,t),\ (|z|<r_0,\ t\geqslant 0).$$

特别地，在条件 (i) 和 (ii) 下即可断定函数 $f(z,t)$ 对每个 $t\geqslant 0$ 都可解析延拓到 D，且在 D 内单叶.

可以把娄威纳链解释为膨胀流，其中 $f(z,t)$ ($z\in D$ 固定)描述质点的路径. 于是 (14) 式在直观上是显然的. 事实上，可将 (14)式表为

(15) $$|\arg\dot f(z,t)-\arg zf'(z,t)|=|\arg p(z,t)|<\frac{\pi}{2}.$$

而这就意味着，在 $\{f(z,t):|z|\leqslant r\}$ 的边界点处的速度向量 $\dot f(z,t)$ 指向该集的外部.

定理 6.2 的证明 (a) 设 $f(z,t)$ 是娄威纳链. 则由(8)式知(13)式对任何 $r_0<1$ 都成立. 由引理 6.1 又知对每点 $z\in D$，函数 $f(z,t)$ 关于 t 绝对连续. 因而 $\dot f(z,t)$ 对几乎一切 t 存在. 因可数多个零集（勒贝格测度为零的集——译者注)的并是零集，故对某个零集 E，当 $z=\frac{1}{k}$ $(k=2,3,\cdots)$ 且 $t\notin E$ 时 $\dot f(z,t)$ 存在. 于是由(9)式及维他利定理知 $\dot f(z,t)$ 对所有的 $z\in D$ 与 $t\notin E$ 都存在.

由(5)式，我们写

(16) $$\frac{f(z,t)-f(z,s)}{t-s}=\frac{e^{t-s}-1}{t-s}\,\frac{z+\varphi}{e^{t-s}+1}\times\frac{f(z,t)-f(\varphi,t)}{z-\varphi}\,p(z,s,t),$$

其中 $p(z,s,t)\in\mathscr{P}$ 仍由(11)式定义. 引理 6.1 表明当 $s\to t$

时，$f(z,t)$在D内局部一致趋于$f(z,s)$，因而$f'(z,t)\to f'(z,s)$。同时由(10)式有$\varphi(z,s,t)\to z$。因此当$t\to s$时，

$$(17)\quad \frac{f(z,t)-f(\varphi(z,s,t),t)}{z-\varphi(z,s,t)} = \int_0^1 f'(z+\lambda[\varphi(z,s,t)-z],t)d\lambda \to f'(z,s).$$

设$s\in E$，则$\dot{f}(z,s)$存在。于是在(16)中令$t\to s$，则根据(17)式便知，对于某个属于$\mathscr{P}$的函数$p(z,s)$有

$$\dot{f}(z,s)=zf'(z,s)p(z,s).$$

因$\dot{f}(z,s)$与$f'(z,s)$关于s均可测，从而$p(z,s)$关于s可测。

为完成逆命题的证明，先要证明下面的定理。

定理 6.3 设$p(z,t)$对每一$t\geq 0$均属于$\mathscr{P}$，并且关于t可测则对$z\in D$及$s\geq 0$，微分方程

$$(18)\qquad \frac{dw}{dt}=-wp(w,t)$$

对几乎一切$t\in[s,\infty)$具有满足初始条件$w(s)=z$的绝对连续唯一解$w(t)=\varphi(z,s,t)$。且解析函数$\varphi(z,s,t)$关于$z\in D$单叶，极限

$$(19)\qquad f(z,s)=\lim_{t\to\infty}e^t\varphi(z,s,t),\quad (z\in D,\ s\geq 0)$$

在D内局部一致地存在并且是满足(14)式的一个娄威纳链。

反之，若$f(z,t)$为娄威纳链，则对几乎一切$t\in[s,\infty)$，由(5)式定义的函数$\varphi(z,s,t)$适合

$$(20)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(z,s,t)=-\varphi(z,s,t)p(\varphi(z,s,t),t),\quad (z\in D),$$

同时满足(19)式。

我们把(14)式与(20)式都称为娄威纳微分方程。这类右端为可测函数的微分方程的一般理论即保证了(18)的绝对连续唯一解的局部存在性(例如可参看 Coddington-Levinson，第二章)。至于这解在$[s,\infty)$内全局存在性则是(非线性)方程(18)的一个特有

的性质。 我们用通常的毕卡-林特略夫（Picard-Lindelöf）迭代法给出一个证明：

证 设 $|z| \leqslant r < 1$，$s \geqslant 0$。我们定义 $w_0(t) \equiv 0$ 且对 $t \in [s, \infty)$，递归定义：

$$w_{n+1}(t) = z\exp\left[-\int_s^t p(w_n(\tau), \tau)d\tau\right], \tag{21}$$

$$(n = 0, 1, \cdots).$$

因当 $\zeta \in D$ 有 $\mathrm{Re}\,p(\zeta, \tau) > 0$，故由归纳法可知 $|w_n(t)| \leqslant r < 1$。因此按(21)定义的 $w_n(t)$ 总是有意义的。由当 $\mathrm{Re}\,a \geqslant 0$，$\mathrm{Re}\,b \geqslant 0$ 有不等式 $|e^{-a} - e^{-b}| \leqslant |a - b|$，所以对 $n \geqslant 1$，推出

$$|w_{n+1}(t) - w_n(t)| \leqslant \int_s^t |p(w_n(\tau), \tau) - p(w_{n-1}(\tau), \tau)|d\tau$$

$$\leqslant \frac{2}{(1-r)^2}\int_s^t |w_n(\tau) - w_{n-1}(\tau)|d\tau,$$

其中我们用到关系式

$$|p'(\zeta, \tau)| \leqslant \frac{2}{1 - |\zeta|^2}, \quad (|\zeta| < 1). \tag{22}$$

它可以由(2.1.11)式直接推出。

再利用 $|w_n(t)| \leqslant r$，由归纳法可证明

$$|w_{n+1}(t) - w_n(t)| \leqslant \frac{2^n(t-s)^n}{(1-r)^{2n}n!},$$

$$(|z| < r, n = 0, 1, \cdots).$$

于是我们断定对每个 t_1，极限 $\lim_{n\to\infty} w_n(t)$ 对于 $|z| \leqslant r$，$s \leqslant t \leqslant t_1$ 一致地存在。又由（21）式，极限函数 $w(t) = \varphi(z, s, t)$ 满足 $|\varphi(z, s, t)| \leqslant |z|$ 且关于 $z \in D$ 解析。 若在（21）式中令 $n \to \infty$，则由勒贝格控制收敛定理得到

$$\varphi(z, s, t) = z\exp\left[-\int_s^t p(\varphi(z, s, \tau), \tau)d\tau\right]. \tag{23}$$

从而 $\varphi(z, s, t)$ 关于 $t \in [s, \infty)$ 绝对连续并满足(18)式，且 $w(s) = \varphi(z, s, s) = z$。

现设 $v(t)$ 是方程(18)的另一个满足 $v(s) = z$ 的绝对连续

解．则 $|v(t)| \leqslant |v(s)|\ (t \geqslant s)$，故由(22)式，对某个常数$K$有

(24) $$\left|\frac{d}{dt}[w(t)-v(t)]\right| = |w(t)p(w(t),t)-v(t)p(v(t),t)| \leqslant K|w(t)-v(t)|.$$

因 $w(s)-v(s)=0$，所以这一微分不等式即蕴含 $w(t)-v(t)\equiv 0$。

我们断定

(25) $$\varphi(z,s,t)=\varphi(\varphi(z,s,\tau),\tau,t),\quad (0\leqslant s\leqslant \tau\leqslant t),$$

因为两端的函数都满足方程(18)且对 $t=\tau$ 具有相同的初始值 $\varphi(z,s,\tau)$.

如果 $z'\neq z$，则 $v(t)=\varphi(z',s,t)$ 是方程(18)的满足 $v(s)=z'$ 的一个解．这时 $|w(s)-v(s)|>0$，则由(24)式知对 $t\geqslant s$ 有 $|w(t)-v(t)|>0$，因此函数 $\varphi(z,s,t)$ 在D内单叶．又由(23)式有

(26) $$e^{t-s}\varphi(z,s,t) = z\exp\left[\int_s^t(1-p(\varphi(z,s,\tau),\tau))d\tau\right]=z+\cdots,$$

它属于 S．从而由寇勃偏差定理就有

(27) $$|\varphi(z,s,\tau)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}e^{s-\tau},\quad(|z|<1,\ s\leqslant\tau).$$

如果 $|z|\leqslant r$，便可由(22)式及 $|\varphi(z,s,\tau)|\leqslant r$ 导出

$$|p(\varphi,\tau)-1|=\left|\int_0^{\varphi}p'(\zeta,\tau)d\zeta\right|\leqslant\frac{2|\varphi|}{(1-r)^2}\leqslant\frac{2}{(1-r)^4}e^{s-\tau},$$

因此(26)式表明对任一 $r<1$，极限(19)在 $|z|\leqslant r$ 内一致地存在，则由(25)式推出

(28) $$f(z,s)=\lim_{t\to\infty}e^t\varphi(z,s,t)=f(\varphi(z,s,\tau),\tau),\quad(0\leqslant s\leqslant\tau<\infty),$$

从而 $f(z,s)$ 是娄威纳链．再利用(9)与(18)式，则可由(28)式导

出

$$0 = \dot{f}(\varphi, \tau) + f'(\varphi, \tau)\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \dot{f}(\varphi, \tau) - \varphi f'(\varphi, \tau)p(\varphi, \tau),$$

即 $f(z, s)$ 满足(14)式。

反之，设 $f(z, t)$ 是一个娄威纳链，$p(z, t)$ 是其在$\mathscr{P}$中的相应函数。如果 $\varphi(z, s, t)$ 是如上述所构造的方程(18)的解，则由(9)式，$f(\varphi(z, s, t), t)$ 关于 t 绝对连续，并且由(14)式有

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(z, s, t), t) = \dot{f}(\varphi, t) - \varphi f'(\varphi, t)p(\varphi, t) = 0.$$

从而 $f(\varphi(z, s, t), t) = f(\varphi(z, s, s), s) = f(z, s)$，于是 $\varphi(z, s, t)$ 就与由(5)式确定的函数(6)恒等，因此方程(20)与(18)等价。再由(28)式便推出(19)式。

现在来完成定理 6.2 的证明。

(b) 设函数 $f(z, t)$ 满足条件 (i) 和 (ii)。我们按照定理 6.3 构造函数 $\varphi(z, s, t)$。对 $|z| < r_0$，从(14)及(18)式我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(z, s, t), t)$$
$$= f'(\varphi, t)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi f'(\varphi, t)p(\varphi, t) = 0;$$

其中我们已用(13)式及维他利定理证明了 $f'(z, t)$ 在 t 的每个有界区间中一致存在。由于 $f(\varphi, (z, s, t), t)$ 关于 t 绝对连续且 $\varphi(z, s, s) = z$，我们可断定对 $|z| < r_0$ (5)式成立。

此外，由(13)式并应用薛礼尔兹引理推出

$$|e^{-t}f(z, t) - z| \leqslant (K_0 + 1)r_0^{-2}|z|^2, \quad (|z| < r_0).$$

故由(27)式就有

$$|f(z, s) - e^t\varphi(z, s, t)| = e^t|e^{-t}f(\varphi, t) - \varphi|$$
$$\leqslant e^t(K_0 + 1)r_0^{-2}|\varphi(z, s, t)|^2 \leqslant K_0' e^{2s-t},$$

从而当 $|z| < r_0$，$e^t\varphi(z, s, t) \to f(z, s)$ $(t \to \infty)$。于是，对 $z \in D$，如果我们由 (19) 式来定义 $f(z, s)$，则由定理 6.3 便知 $f(z, s)$ 是娄威纳链。

我们不加证明地指出，对于例6.1的裂纹区域族所对应的娄威纳链，相应的

(29) $$p(z, t) = \frac{1 + k(t)z}{1 - k(t)z}, \quad (|z| < 1, t \geq 0),$$

其中 $k(t)$ 连续且满足 $|k(t)| = 1$（参看 Löwner 1923; Golusin 第三章; Hayman 第六章）。裂纹区域在全体单连通区域空间内稠密（按核收敛意义）。所以通常只考虑这一特殊情形就足够了。这是方便的，因为有(29)，使娄威纳微分方程(14)与(20)取较简形式。我们将只需要它的一般形式。在贝克尔的文章中还讨论了(14)的一般解 (Becker 1974)。

问　　题

1. 设 $f \in S$ 把 D 映照成以两条伸向 ∞ 且互不相交的若当弧为裂纹的平面。证明 $f(z)$ 可以嵌入于无穷多个不同的娄威纳链中。

2. 设 $\tau \geq 0$，沿用(5)式中的记号，试证

$$g(z, t) = \begin{cases} e^t \varphi(z, t, \tau), & (0 \leq t \leq \tau); \\ e^t z, & (\tau < t < \infty) \end{cases}$$

是娄威纳链。

3. 设 $f \in S$ 并对 $z \in D$ 满足 $|f(z)| < e^\tau$。试证明存在满足 $f(z, 0) = f(z)$ 的娄威纳链使得对于 $t \geq \tau$ 有 $f(z, t) = e^t z$，反之亦然。

4. 设函数 $f \in S$ 具有实系数。证明存在具有实系数的娄威纳链 $f(z, t)$ 使得 $f(z, 0) = f(z)$，且娄威纳微分方程中的函数 $p(z, t)$ 亦具有实系数。

5. 设 $f \in S$，$g \in S$ 被嵌入娄威纳链 $f(z, t)$ 和 $g(z, t)$，并令 $h_t(z) = g(\varphi(z, 0, t), t)$，$(0 \leq t < \infty)$。试证：$h_t(z) \in S$，$h_0(z) = g(z)$ 且当 $t \to \infty$ 时 $h_t(z) \to f(z)$ (G. S. Goodman 1969)。

6. 设当 $0 \leq t < t_0$ 有 $g(z, t) \prec U(z)$，$f'(0) \neq 0$。假定 $g(z, 0) = f(z)$，$\dot{g}(z, 0) = i\alpha z f'(z)$（$\alpha$ 为实数）且 $\ddot{g}(z, 0) = h(z)$。试证：

$$\alpha^2 + \alpha^2 \operatorname{Re}\left[z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right] + \operatorname{Re}\left[\frac{h(z)}{zf'(z)}\right] \leq 0$$

(Robertson 1961; Brickman 1971)。

6.2 应用于估计问题

1. 首先应用线性偏微分方程(6.1.14)来研究系数问题。

根据定理 6.1，可将每个函数

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n\in S$$

按 $f(z)=f(z,0)$ 嵌入一个娄威纳链

$$(2)\qquad f(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)z^n,\quad (|z|<1,\ 0\leqslant t<\infty)$$

中，其中 $a_n(t)$ 绝对连续且 $a_1(t)=e^t(t\geqslant 0)$；$a_n(0)=a_n$，$(n=1,2,\cdots)$。由定理 6.2，对几乎所有的 $t\geqslant 0$，有

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}f(z,t)=zf'(z,t)p(z,t),\quad (z\in D),$$

其中

$$(4)\qquad p(z,t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)z^n\in\mathscr{P}.$$

比较(3)式两端的系数便得对几乎所有的 $t\geqslant 0$，

$$(5)\quad \dot a_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu a_\nu(t)c_{n-\nu}(t)+na_n(t),\quad (n=1,2,\cdots).$$

因此，设 $0\leqslant s<\tau<\infty$，则对 $n=2,3,\cdots$ 有

$$(6)\qquad \int_s^{\tau}\frac{d}{dt}[e^{-nt}a_n(t)]dt=\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\int_s^{\tau}e^{-nt}a_\nu(t)c_{n-\nu}(t)dt.$$

因 $e^{-t}f(z,t)\in S$，故由 (2) 式便知对每一个 ν，$e^{-t}a_\nu(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 内有界。于是在(6)式中令 $\tau\to\infty$ 便得到

$$(7)\qquad a_n(s)=-e^{ns}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\int_s^{\infty}e^{-nt}a_\nu(t)c_{n-\nu}(t)dt$$

$$(n=2,3,\cdots,\ s\geqslant 0).$$

特别对 $n=2$ 有

$$(8)\qquad a_2(s)=-e^{2s}\int_s^{\infty}e^{-t}c_1(t)dt,\quad (s\geqslant 0).$$

由于 $p(z,t)\in\mathscr{P}$，故由推论 2.3 知 $|c_1(t)|\leqslant 2$，于是我们又得到

$$|a_2|=|a_2(0)|\leqslant 2.$$

下面叙述娄威纳(1923)以及菲开特和宰格(1933)的一个更为深刻的结果(比较4.4节推论4.8):

定理 6.4 若 $f\in S$, $0\leqslant\lambda<1$, 则

$$|a_3-\lambda a_2^2|\leqslant 1+2\exp\left(-\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right), \tag{9}$$

并且对于每个 λ 等号均能成立. 特别有 $|a_3|\leqslant 3$.

证 (a) 先导出关于 $\mathscr{P}$ 中函数 $p(z)=1+c_1z+\cdots$ 的一个估计式: 函数

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}\frac{p(z)-1}{p(z)+1}=\frac{1}{2}c_1+\left(\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{4}c_1^2\right)z+\cdots$$

对 $|z|<1$ 满足 $|\varphi(z)|\leqslant 1$. 由 $|\varphi'(0)|\leqslant 1-|\varphi(0)|^2$ (Ahlfors 136页)即得

$$\left|\frac{1}{2}c_2-\frac{1}{4}c_1^2\right|\leqslant 1-\frac{1}{4}|c_1|^2. \tag{10}$$

上式左端取负实部即可推出:

$$2+\mathrm{Re}c_2\geqslant\frac{1}{2}\mathrm{Re}c_1^2+\frac{1}{2}|c_1|^2=(\mathrm{Re}c_1)^2. \tag{11}$$

(b) 在(7)式中取 $n=3$, $s=0$, 再由(8)式得到

$$\begin{aligned} a_3&=-\int_0^\infty e^{-2t}c_2(t)dt+2\int_0^\infty e^{-t}\left(\int_t^\infty e^{-\tau}c_1(\tau)d\tau\right)c_1(t)dt \\ &=-\int_0^\infty e^{-2t}c_2(t)dt+\left[\int_0^\infty e^{-t}c_1(t)dt\right]^2. \end{aligned} \tag{12}$$

故由(8)式算出

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[a_3-\lambda a_2^2]&=-\int_0^\infty e^{-2t}\mathrm{Re}c_2(t)\,dt \\ &\quad+(1-\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{Re}c_1(t)\,dt\right)^2 \\ &\quad-(1-\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{Im}c_1(t)\,dt\right)^2. \end{aligned} \tag{13}$$

因为 $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+a_2e^{i\theta}z^2+a_3e^{2i\theta}z^3+\cdots$ 仍属于 S, 我们总可假定 $a_3-\lambda a_2^2\geqslant 0$. 令 $u(t)=\mathrm{Re}c_1(t)$, 则由(13)式与(11)式便得

$$(14)\qquad a_3-\lambda a_2^2\leqslant\int_0^\infty e^{-2t}(2-u(t)^2)dt+(1-\lambda)\left(\int_0^\infty e^{-t}u(t)dt\right)^2.$$

用薛瓦尔兹不等式估计第二个积分，知对于每个正连续函数 $v(t)$ 我们有

$$(15)\qquad a_3-\lambda a_2^2\leqslant 1+\int_0^\infty e^{-2t}u(t)^2\left[-1+\frac{(1-\lambda)b}{v(t)}\right]dt,$$

$$b=\int_0^\infty v(t)dt.$$

如果在某个起始区间 $[0,\tau]$ 上的积分为零，我们便得出最好的估计。因此，选取

$$(16)\qquad v(t)=\begin{cases}(1-\lambda)b, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ (1-\lambda)be^{\tau-t}, & \text{当 } \tau\leqslant t<\infty.\end{cases}$$

由(15)式中 b 的定义，必有

$$b=b(1-\lambda)(1+\tau),$$

故求得 $\tau=\frac{\lambda}{1-\lambda}$. 再由 $|u(t)|=|\mathrm{Re}\,c_1(t)|\leqslant 2$, 从(15)式便得到

$$0\leqslant a_3-\lambda a_2^2\leqslant 1+4\int_\tau^\infty e^{-2t}(-1+e^{t-\tau})dt=1+2e^{-2\tau}.$$

(c) 最后证明等号成立是可能的。设 $0\leqslant\sigma<\tau=\frac{\lambda}{1-\lambda}$,

定义

$$k(t)=\begin{cases}e^{t-\tau}+i\sqrt{1-e^{2(t-\tau)}}, & (0\leqslant t\leqslant\sigma),\\ e^{t-\tau}-i\sqrt{1-e^{2(t-\tau)}}, & (\sigma<t\leqslant\tau),\\ 1, & (\tau<t<\infty).\end{cases}$$

考虑

$$(17)\qquad p(z,t)=\frac{1+k(t)z}{1-k(t)z}=1+2k(t)z+2k(t)^2z^2+\cdots,$$

根据定理 6.3 存在一个相应的娄威纳链 $f(z,t)$; 若定义 $f(z)=f(z,0)$ 则 $f\in S$, 并且从(13)式经简短计算后得到

$$\operatorname{Re}[a_3 - \lambda a_2^2] = 1 + 2e^{-2\tau}$$
$$- 4(1-\lambda)\left(\int_c^\sigma \sqrt{e^{-2t} - e^{-2\tau}}\,dt - \int_\sigma^\tau \sqrt{e^{-2t} - e^{-2\tau}}\,dt\right)^2.$$

适当选取 σ 可使得最后括号取零值，从而有

$$\operatorname{Re}[a_3 - \lambda a_2^2] = 1 + 2e^{-2\tau},$$

且由(9)式知 $\operatorname{Im}[a_3 - \lambda a_2^2]$ 必为零.

推论 6.1 若 $f(z)$ 是 S 中的奇函数，则

(18) $$|a_5| \leqslant \frac{1}{2} + e^{-\frac{2}{3}} \approx 1.013,$$

并且等号可以成立.

这一结果（Fekete and Szegö 1933）表明，对于单叶奇函数，与比伯巴赫猜想类似的猜想 $|a_n| \leqslant 1$ 并不成立．我们已经证明 $|a_3| \leqslant 1$（定理 1.5），并且对一切 n 有 $|a_n| < 1.17$（3.5 节定理 3.12）.

证 由于 $f(z)$ 是奇函数，则函数

$$f^*(z) = f(\sqrt{z})^2 = z + 2a_3 z^2 + (2a_5 + a_3^2)z^3 + \cdots$$

在 D 内解析单叶（其逆在引理 1.2 中证明过）．因此由定理 6.4 取 $\lambda = \frac{1}{4}$ 便有

$$2|a_5| = \left|(2a_5 + a_3^2) - \frac{1}{4}(2a_3)^2\right| \leqslant 1 + 2e^{-\frac{4}{3}},$$

并且等号对于 $f(z) = \sqrt{f^*(z^2)}$ 成立，其中 $f^*(z)$ 是定理 6.4 中取 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时的极值函数.

推论 6.2 若 $g(\zeta)$ 是 Σ 中的奇函数，则

(19) $$|b_3| \leqslant \frac{1}{2} + e^{-6} \approx 0.5025,$$

并且等号可以成立.

不过我们在 4.4 节曾用格拉贝定-谢菲尔不等式证明这一结论对于 Σ 中所有函数皆成立．（Garabedian and Schiffer 1955b）.

证 因 $g(\zeta)$ 为奇函数，因而 $g(\zeta)\neq 0$，$(|\zeta|>1)$，故函数

$$f(z)=g\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{-2}=z-2b_1z^2+(-2b_3+3b_1^2)z^3+\cdots$$

属于 S。在定理 6.4 中取 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时就有

$$2|b_3|=\left|(-2b_3+3b_1^2)-\frac{3}{4}(2b_1)^2\right|\leqslant 1+2e^{-6},$$

并且等号显然能够成立。

2. 现在我们应用非线性常微分方程 (6.1.20) 来导出格隆斯基 (1932) 和格软茨斯 (Grötzsch 1933) 的一个关于函数增长的估计，这一估计式我们已在 3.2 节中由戈鲁辛不等式推得。

定理 6.5 若 $f\in S$，则

$$\left|\log z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad(|z|<1). \tag{20}$$

且对于 $0\leqslant\alpha<2\pi$，$z_0\in D$，必存在函数 $f\in S$ 使得

$$\log\left[z_0\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right]=e^{i\alpha}\log\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}. \tag{21}$$

证 (a) 根据定理 6.1，可将 $f(z)$ 嵌入一个娄威纳链中，同时由定理 6.3 知：

$$f(z)=\lim_{t\to\infty}e^t\varphi(z,t), \tag{22}$$

$$\varphi(z,t)\equiv\varphi(z,0,t).$$

仍以加点表示 $\frac{\partial}{\partial t}$，则由(6.1.20)式知，对几乎一切 $t\geqslant 0$ 有

$$\dot\varphi(z,t)=-\varphi(z,t)p(\varphi(z,t),t),\quad(|z|<1), \tag{23}$$

因此有

$$\frac{\partial}{\partial t}|\varphi(z,t)|=|\varphi|\mathrm{Re}\frac{\dot\varphi}{\varphi}=-|\varphi|\mathrm{Re}\,p(\varphi,t)<0. \tag{24}$$

在 (23) 中关于 z 微分，并且由引理 6.1 及维他利定理可证明这微分顺序可以交换，即知对几乎一切 $t\geqslant 0$ 有

$$(25)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi'(z,t)=\frac{\partial}{\partial z}\dot{\varphi}(z,t)$$
$$=-\varphi'(z,t)[p(\varphi,t)+\varphi p'(\varphi,t)].$$

由(25)及(23)式我们得到

$$(26)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\log\frac{z\varphi'(z,t)}{\varphi(z,t)}=-\varphi(z,t)p'(\varphi,t),\quad (|z|<1).$$

因为每一函数 $p\in\mathscr{P}$ 都可表为 $p(z)=\dfrac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}$ 且 $|\phi(z)|<1$，同时 $|\phi'(z)|\leqslant\dfrac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$ (Ahlfors 136 页)，因此知

$$(27)\qquad |p'(z)|\leqslant\frac{2}{|1-\phi(z)|^2}\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$$
$$=\frac{2\mathrm{Re}p(z)}{1-|z|^2}.$$

于是从(20)式与(26)式便得

$$\left|\log z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|=\left|\int_0^\infty\varphi p'(\varphi,t)dt\right|$$
$$\leqslant\int_0^\infty\frac{2|\varphi|}{1-|\varphi|^2}\mathrm{Re}p(\varphi,t)dt$$
$$=-\int_0^\infty\frac{2}{1-|\varphi|^2}\frac{\partial}{\partial t}|\varphi|dt$$
$$=\int_0^{|z|}\frac{2d\xi}{1-\xi^2}=\log\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

其中我们还用到 (24) 式以及 $\varphi(z,0)=z$ 和当 $t\to\infty$ 时 $\varphi(z,t)\to 0$.

(b) 若 $0\leqslant\alpha<2\pi$, $z_0\in D$. 则对每个 $\zeta\in D$, 存在唯一的 $c=c(\zeta)$, $|c|=1$ 使得

$$(28)\qquad \arg\left(\frac{c\zeta}{(1-c\zeta)^2}\right)=\alpha+\pi.$$

如同定理 6.3 的证明，我们知微分方程

$$(29)\qquad \dot{\zeta}=-\zeta\frac{1+c\zeta}{1-c\zeta}\quad (c=c(\zeta))$$

在 $0\leqslant t<\infty$ 内有唯一的一个解满足 $\zeta(0)=z_0$。

按(17)式定义 $p(z,t)$. 其中 $k(t)=c(\zeta(t))$，再比较(29)式与(23)式知 $\varphi(z_0,t)=\zeta(t)$，于是由(26),(28)及(29)式，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\log\frac{z_0\varphi'(z_0,t)}{\varphi(z_0,t)}=-\frac{2k\zeta}{(1-k\zeta)^2}$$
$$=\frac{2e^{i\alpha}|\zeta|}{|1-k\zeta|^2}=-\frac{2e^{i\alpha}}{1-|\zeta|^2}\frac{\partial|\zeta|}{\partial t},$$

积分上式，由(22)式便推出(21)式。

作为第一个应用，由(20)式取实部便得

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqslant\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad(|z|<1).$$

这是寇勃偏差定理中估计式之一，而其余的估计式可由此推出。

再在(20)式中取虚部得到

$$\left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad(|z|<1),\tag{30}$$

且若取 $\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$，(21)式表明，对每点 $z\in D$，(30)式中等号都能成立。

利用(30)式，我们可以确定 S 类的星形半径，即对每个 $f\in S$ 使得 $f(z)$ 在 $|z|<r_1$ 内星形的最大值 r_1。

推论 6.3 S 类的星形半径为

$$r_1=\tanh\frac{\pi}{4}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{e^{\frac{\pi}{2}}+1}\approx0.656.\tag{31}$$

证 因 $\log\frac{1+r_1}{1-r_1}=\frac{\pi}{2}$，由(30)式便知对 $f\in S$，

$$\operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}>0,\quad(|z|<r_1);$$

而如果 $|z|>r_1$，则 $\operatorname{Re}z\frac{f'(z)}{f(z)}$ 可以取负值。于是由2.2节定理2.5即推出这一结论。也可参看下节的定理6.6。

有关娄威纳理论的进一步应用可以在诸如戈鲁辛的书（第四章），梅曼的书（第六章）及沙菲尔与斯潘塞尔的书（第九章）中找到。

问　　题

1. 设 $f\in S$ 的像域为 m 折对称．试证明精确估计（Fekete and Szegö, 1933；比较 3.3 节问题 3）

$$|a_{m+1}|\leqslant\frac{1}{m}+\frac{2}{m}\exp\left(-\frac{2(m-1)}{m+1}\right).$$

2. 证明：对每个奇数 $n\geqslant 3$，

$$\max_{f\in\Sigma}|b_n|\geqslant\frac{2}{n+1}+\frac{4}{n+1}\exp\left[-\frac{2(n+3)}{n-1}\right]>\frac{2}{n+1}$$

（比较定理 5.5）。

3. 试从定理 6.5 利用宽勒变换导出

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|},\quad(|z|<1),$$

或利用娄威纳方法直接证明之（Grunsky 1932）。

4. 设 $f\in S$ 满足 $|f(z)|<e^{r}$，$|z|<1$．试利用 6.1 节问题 3 证明：

$$|a_3|\leqslant\begin{cases}1-e^{-2r}, & \text{若 } 0\leqslant r\leqslant 1,\\ 1+e^{-2r}-4e^{-r-\sigma}+2e^{-2\sigma}, & \text{若 } 1\leqslant r<\infty,\end{cases}$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 且 $\sigma e^{-\sigma}=e^{-r}$ (Tammi 1953).

5. 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内单叶且 $f(0)=0$，$|f(z)|<1$．试证

$$\left|\arg z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|}-\log\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|}.$$

6.3 应用于单叶性判别

现在我们在相反的方向上应用定理 6.2，即作为对单叶性的一种判别：若 $f(z,t)$ 满足条件 (i) 和 (ii)，则 $f(z)\equiv f(z,0)$ 在 D 内单叶．

如果 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，且对 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 有

$$(1)\qquad w\in f(D),\ \tau>0\Longrightarrow w\exp(-\tau e^{-i\alpha})\in f(D),$$

则我们称 $f(z)$ 为 α 型**螺旋形函数**．其几何意义是：对于每一

点，像域也包含过该点的一条对数螺线．星形函数是 $\alpha=0$ 时的特殊情形。

下面我们给出这种函数的一个解析特征（Špaček 1933; Robertson 1961）:

定理 6.6 D 内解析函数 $f(z)=z+\cdots$ 为 α 型螺旋形函数 $\left(-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 当且仅当

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}z\frac{f'(z)}{f(z)}\right]>0, \quad (|z|<1).$$

证 设 $a=\tan\alpha$, 定义

$$\text{(3)} \qquad f(z,t)=e^{(1-ia)t}f(e^{iat}z)=e^{t}z+\cdots, \qquad (|z|<1,\ t\geqslant 0).$$

则定理 6.2 的条件 (i) 满足．由于

$$\frac{\dot f(z,t)}{zf'(z,t)}=ia+(1-ia)\frac{f(e^{iat}z)}{e^{iat}zf'(e^{iat}z)},$$

因此定理 6.2 的条件 (ii) 与这里的(2)式等价．从而知,(2)式满足当且仅当 $f(z,t)$ 为娄威纳链． 这时 $f(z)=f(z,0)$ 在 D 内单叶且

$$f(z)\prec f(z,t)\prec e^{(1-ia)t}f(z), \quad t\geqslant 0.$$

此式便蕴含(1)式．反之,若(1)式成立．则(3)式显然定义一个娄威纳链．

下面这个有用的判别方法别具风格 (Duren, Shapiro and Shields 1966; Becker 1972).

定理 6.7 设 $f(z)$ 在 D 内解析, $f'(0)\neq 0$. 如果

$$\text{(4)} \qquad (1-|z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant 1 \quad (|z|<1),$$

则 $f(z)$ 在 D 内单叶．反之，如果 $f(z)$ 在 D 内单叶，则

$$\text{(5)} \qquad (1-|z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|<6, \quad (|z|<1).$$

证 不妨设 $f(z)=z+\cdots$, 令

(6) $$f(z,t)=f(e^{-t}z)+(e^{t}-e^{-t})zf'(e^{-t}z),\quad (z\in D,\ t\geqslant 0).$$

显然定理 6.2 的条件 (i) 满足. 又有

$$\dot f(z,t)=e^{t}zf'(e^{-t}z)-(1-e^{-2t})z^{2}f''(e^{-t}z),$$
$$zf'(z,t)=e^{t}zf'(e^{-t}z)+(1-e^{-2t})z^{2}f''(e^{-t}z).$$

令 $p(z,t)=\dfrac{\dot f(z,t)}{zf'(z,t)}$. 由(4)式它满足

(7) $$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right|=(1-e^{-2t})\left|e^{-t}z\frac{f''(e^{-t}z)}{f'(e^{-t}z)}\right|\leqslant\frac{1-e^{-2t}}{1-e^{-2t}|z|^{2}}<1.$$

因而 $\operatorname{Re}p(z,t)>0$, 则根据定理 6.2 知 $f(z,t)$ 是娄威纳链. 特别是有 $f(z)=f(z,0)$ 在 D 内单叶. 相反方向的结果(5)式可立即从 1.2 节引理 1.3 推出.

我们由函数 $e^{\lambda z}(\lambda>\pi)$ 在 D 内非单叶可知,(4) 式中的量的上确界为 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\lambda$, 即知 (4) 式中右端常数不能易为任一个大于 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi\approx 1.21$ 的数.

对于Σ类,我们也可证明一个类似的判别法 (Becker 1973):

定理 6.8 若 $g(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\cdots$ 在 $1<|\zeta|<\infty$ 内解析且

(8) $$(|\zeta|^{2}-1)\left|\zeta\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right|\leqslant 1\quad(|\zeta|>1),$$

则 $g(\zeta)$ 在Δ内单叶.

证 不妨设 $b_0=0$. 考虑函数

(9) $$\begin{aligned}f(z,t)&=[g(e^{t}z^{-1})-(e^{t}-e^{-t})z^{-1}g'(e^{t}z^{-1})]^{-1}\\&=e^{t}z[1+2b_1z^{2}-b_1e^{-2t}z^{2}+\cdots]^{-1}\\&=e^{t}z+\cdots,\end{aligned}$$

这函数对某个 $r_0>0$ 及所有 $t\geqslant 0$ 在 $|z|<r_0$ 内解析,并且满足(6.1.13)式,因而条件 (i) 成立. 至于条件 (ii) 则可从(8)式

得出;因对于 $|z|<1$ 及 $t\geqslant 0$, 由(6.1.14)式确定的 $p(z,t)$ 满足

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right|=(e^{2t}-1)\left|e^t z^{-1}\frac{g''(e^t z^{-1})}{g'(e^t z^{-1})}\right| \tag{10}$$

$$\leqslant\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}|z|^{-2}-1}<1,$$

因此 $\mathrm{Re}\,p(z,t)>0$,从而便可推出 $g(\zeta)=f(\zeta^{-1},0)^{-1}$ 在 $|\zeta|>1$ 内单叶.

下面我们将定理 6.7 应用于研究缺项级数(见 5.4 节).

定理 6.9 给定任一个随 $x\to+\infty$ 以任意缓慢的方式递增至 $+\infty$ 的函数 $\phi(x)\geqslant 1$, 则必存在具有非负系数的有界单叶函数

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{n_\nu}z^{n_\nu}\quad(|z|<1), \tag{11}$$

使得

$$N(x)\leqslant\phi(x)\quad(0<x<\infty), \tag{12}$$

$$\limsup_{\nu\to\infty}n_\nu a_{n_\nu}=\infty,$$

其中 $N(x)$ 是指标 $n_\nu\leqslant x$ 的个数.

证 设 $1<\lambda<\frac{9}{8}$, p, q 为充分大的整数. 假定整数序列 (m_k) 满足

$$\frac{m_{k+1}}{m_k}\geqslant q\quad(k=1,2,\cdots),\ m_1\geqslant 1. \tag{13}$$

我们考虑由

$$f'(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda}{p}z^{m_k}\right)^p\quad(|z|<1) \tag{14}$$

定义的函数 $f(z)$. 对 $|z|=r<1$, 我们求得

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda m_k z^{m_k}}{1+p^{-1}\lambda z^{m_k}}\right| \tag{15}$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{1-p^{-1}\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} m_k r^{m_k}.$$

将最后这个(缺项甚多的)级数"补齐"如下:

$$\frac{1+r}{(1-r)^3}\sum_{k=1}^{\infty} m_k r^{m_k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 r^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty} m_k r^{m_k}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m_k\leqslant n}(n-m_k)^2 m_k\Big) r^{n-1}.$$

利用 $(n-x)^2x\leqslant\frac{4}{27}n^3(0\leqslant x\leqslant n)$ 来估计内层和式的第一项，而用(13)式估计其余的项，便知上边最后这个表达式要

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{4}{27}n^3+n^2\Big(\frac{n}{q}+\frac{n}{q^2}+\cdots\Big)\Big] r^{n-1}$$

$$\leqslant \Big(\frac{4}{27}+\frac{1}{q-1}\Big)\frac{6}{(1-r)^4},$$

于是由(15)式得出

(16) $$(1-|z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant\frac{\lambda}{1-p^{-1}\lambda}\Big(\frac{8}{9}+\frac{6}{q-1}\Big).$$

因 $\lambda<\frac{9}{8}$，故可选取 p，q 充分大而使上式右端表达式 <1，从而由定理 6.7 知 $f(z)$ 在D内单叶. $f(z)$ 的有界性可由积分(4)式推出.

由(14)式我们得到

(17) $$zf'(z)=z\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\lambda z^{m_k}+\cdots+\Big(\frac{\lambda}{p}\Big)^p z^{pm_k}\Big)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu a_{n_\nu} z^{n_\nu},$$

其中指标 n_ν 对某个 $k=1,2,\cdots$ 具有如下形式:

$$n_\nu=1+i_1m_1+\cdots+i_km_k\quad(i_1,\cdots,i_k=0,\cdots,p).$$

因此就有

(18) $N(x)\leqslant(p+1)^k$，当 $x<m_{k+1}$.

由于当 $x \to +\infty$ 时 $\phi(x) \to +\infty$，故总可找到一个迅速增加的序列 $\{m_k\}$ 使得 (13) 式成立，且 $(p+1)^k < \phi(m_k)$ $(k = 1, 2, \cdots)$。于是当 $x < m_1$ 有 $N(x) \leqslant 1 \leqslant \phi(x)$，当 $m_k \leqslant x < m_{k+1}$，$(k = 1, 2, \cdots)$ 时，由(18)式有

$$N(x) < \phi(m_k) \leqslant \phi(x).$$

这就证明了(12)式的第一个结论．此外，由(17)式，当 $n = 1 + m_1 + \cdots + m_l$ $(l = 1, 2, \cdots)$ 时，有 $na_n \geqslant \lambda^l$，因 $\lambda > 1$，就推出(12)式的第二个结论．

问　　题

1．设 $f(z)$ 在 D 内解析，$f(0) = 0$，$f'(0) \neq 0$．证明：$f(z)$ 在 D 内单叶当且仅当存在函数 $h(w)$ 在 $f(D)$ 内解析且使得

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{h(f(z))}\right] > 0 \quad (z \in D)$$

(Brickman 1973)．

2．设 $g(z)$ 星形，$p(z)$ 在 D 内解析且 $\mathrm{Re}\,p(z) > 0$．试证明

$$f(z) = \left(\int_0^z p(\zeta) g(\zeta)^{\alpha} \zeta^{i\beta - 1} d\zeta\right)^{\frac{1}{\alpha + i\beta}} \quad (\alpha > 0,\ \beta \in R)$$

在 D 内解析单叶 (Bazilevič 1955；Pommerenke 1965b)．

3．设 $f(z)$ 在 D 内解析且 $f'(0) \neq 0$．试证明：如果对某个 $|c| \leqslant 1$，$c \neq -1$，有

$$\left|(1 - |z|^2) z \frac{f''(z)}{f'(z)} + c|z|^2\right| \leqslant 1 \quad (|z| < 1),$$

则 $f(z)$ 在 D 内单叶（可考虑函数 $f(e^{-t}z) + (1 + c)^{-1}(e^t - e^{-t}) z f'(e^{-t}z)$ 并标准化：Ahlfors 1974；Becker 1974）．

4．设 $f \in S$ 并定义 $f_c(z) = \int_0^z |f'(\zeta)|^c d\zeta$，证明：若 $|c| \leqslant \frac{1}{6}$ 则 $f_c \in S$．并证明 1/6 不能易为任何比 1/3 大的数（Duren，Shapiro and Shields 1966；Becker 1972；Royster 1965）．

5．试证明：存在函数 $g \in \Sigma$，其系数对某个常数 $\alpha > 0$ 满足

$b_n \leqslant 0$，$(n = 1, 2, \cdots)$；$b_n \neq O(n^{\alpha - 1})$ $(n \to \infty)$

(Clunie 1959b；比较定理5.5)．

6.4 二阶线性微分方程

那哈利(1949)用微分方程给出了单叶性的另一特征，颇不同于我们在前三节所讨论的娄威纳理论。

设 $a(z)$ 和 $b(z)$ 解析。我们称微分方程

(1) $$w''(z)+a(z)w'(z)+b(z)w(z)=0$$

在D内为非共轭的，如果它的任一个非平凡解在D内都最多有一个零点。

方程(1)经变换

(2) $$w(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^z a(\zeta)d\zeta\right)v(z)$$

成为规范式

(3) $$v''(z)+\left[b(z)-\frac{1}{2}a'(z)-\frac{1}{4}a(z)^2\right]v(z)=0,$$

它仍然保持非共轭性。

引理 6.3 设 $f(z)$ 在D内亚纯，定义

(4) $$q(z)=\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{1}{4}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

则 $f(z)$ 在D内单叶当且仅当

(5) $$w''(z)+q(z)w(z)=0\quad(|z|<1)$$

在D内为非共轭。

注意表达式 $2q(z)$ 是薛瓦尔兹导数 $\{f(z),z\}$。它在D内解析当且仅当 $f(z)$ 在D内局部单叶，即 $f(z)$ 在D内无多重极点且 $f'(z)\neq 0$。薛瓦尔兹导数在麦比乌斯变换下不变。

证 微分方程

(6) $$u''(z)-\frac{f''(z)}{f'(z)}u'(z)=0$$

有一般解 $u(z)=\alpha f(z)+\beta$，因此它为非共轭的当且仅当 $f(z)$ 单叶。根据(2),(3)式知(6)的规范式就是(5)式。

那哈利(1949, 1954，亦可参看 Beesack 1956)推得下面这个单叶性判别法：

定理 6.10 设实值偶函数 $p(x)$ 在 $-1<x<1$ 连续且使得当 $0<x<1$ 时 $(1-x^2)^2p(x)$ 不增，并且微分不等式

(7) $$u''(x)+p(x)u(x)\leqslant 0 \quad (-1<x<1)$$

有一个解 $u(x)>0$。若 $f(z)$ 在 D 内亚纯且局部单叶并且对于由 (4) 式定义的 $q(z)$ 有

(8) $$|q(z)|\leqslant p(|z|),\quad (z\in D).$$

则 $f(z)$ 在 D 内单叶.

证 根据引理 6.3，我们必须证明微分方程(5)在 D 内为非共轭. 设结论不对,即存在一个解 $w(z)$，对于 $z_1\neq z_2\ (z_1, z_2\in D)$ 有 $w(z_1)=w(z_2)=0$. 不妨设过 z_1，z_2 与 ∂D 正交的圆周 C 也与虚轴正交,并设交点为 iy_0. 定义

(9) $$\varphi(\zeta)=\frac{\zeta+iy_0}{1-iy_0\zeta},\quad (\zeta\in D).$$

函数 $w(\varphi(\zeta))$ 满足(1)型微分方程. 经变换(2)后它化为

(10) $$v''(\zeta)+q^*(\zeta)v(\zeta)=0,\ q^*(\zeta)=\varphi'(\zeta)^2q(\varphi(\zeta)).$$

因 $C=\varphi(\mathbb{R})$，这个微分方程有一个解具有两个实零点. 而且由(8)式,对 $-1<\xi<1$ 有

$$\begin{aligned}(1-\xi^2)^2|q^*(\xi)|&=|(1-\xi^2)\varphi'(\xi)|^2|q(\varphi(\xi))|\\&=(1-|\varphi(\xi)|^2)^2|q(\varphi(\xi))|\\&\leqslant(1-|\varphi(\xi)|^2)^2p(|\varphi(\xi)|).\end{aligned}$$

由 (9) 式有 $|\varphi(\xi)|\geqslant|\xi|$，故由定理中的单调性假设及根据 $p(|\xi|)=p(\xi)$ 便推出:

$$(1-\xi^2)^2|q^*(\xi)|\leqslant(1-\xi^2)^2p(\xi)\quad(-1<\xi<1).$$

于是由斯图姆 (Sturm) 比较定理的如下复数形式便可得出矛盾.

引理 6.4 如果微分方程 (7) 有正解且

$$\operatorname{Re} q(x)\leqslant p(x)\quad(-1<x<1).$$

则微分方程 $v''(x)+q(x)v(x)=0$ 的任一个非平凡解在 $-1<x<1$ 内至多有一个零点.

证 因 $u(x)>0$，$v''(x)=-qv(x)$，$u''(x)\leqslant -pu(x)$,因而,

$$(11)\quad \frac{d}{dx}\mathrm{Re}\left[v'(x)\bar{v}(x)-\frac{u'(x)}{u(x)}|v(x)|^2\right]$$

$$=\mathrm{Re}[v''\bar{v}]+|v'|^2-\frac{u''}{u}|v|^2+\frac{u'^2}{u^2}|v|^2-2\frac{u'}{u}\mathrm{Re}v'\bar{v}$$

$$\geqslant(p-\mathrm{Re}q)|v|^2+\left|v'-\frac{u'}{u}v\right|^2,$$

假定当 $-1<x_1<x_2<1$，有 $v(x_1)=v(x_2)=0$，那末，积分(11)式便得

$$0\geqslant\int_{x_1}^{x_2}(p-\mathrm{Re}q)|v|^2dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|v'-\frac{u'}{u}v\right|^2dx.$$

而因 $p-\mathrm{Re}q\geqslant 0$，故推得

$$\frac{d}{dx}\frac{v(x)}{u(x)}=\frac{1}{u(x)}\left(v'(x)-\frac{u'(x)}{u(x)}v(x)\right)=0,$$

因此 $v=cu$，$c=\mathrm{const}\neq 0$，这是不正确的，因为 $u(x_1)\neq 0$，$v(x_1)=0$.

推论 6.4 设 $f(z)$ 在D内亚纯，$q(z)$ 仍由(4)式定义，如果

$$(12)\qquad |q(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|^2)^2}\quad(z\in D),$$

则 $f(z)$ 在D内单叶。反之，若 $f(z)$ 在D内单叶则

$$(13)\qquad |q(z)|\leqslant\frac{3}{(1-|z|^2)^2}\quad(z\in D).$$

因子1和3都是最佳的。

证 (a) 微分方程

$$u''(x)+(1-x^2)^{-2}u(x)=0,\quad(-1<x<1)$$

有正解 $u(x)=\sqrt{1-x^2}$，因此根据定理 6.10 就由 (12) 式得出 $f(z)$ 的单叶性。函数

$$f(z)=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\nu}\quad(\nu>0)$$

在D无穷多次取值1，因对应的

$$q(z)=\frac{1+\nu^2}{(1-z^2)^2}.$$

故知(12)式中因子 1 是最佳的。

(b) 至于 (13) 式，我们在 (3.2.14) 式中已证明它对所有单叶函数都成立。这也可以通过考虑寇勃变换 (1.2.10) 式，并利用 $|a_3-a_2^2|\leqslant 1$ (定理 1.5)来证明，并且对于寇勃函数等号成立。

推论 6.5 若 $f(z)$ 在D内亚纯且

$$|q(z)|\leqslant\frac{1}{4}\pi^2\quad(z\in D),\tag{14}$$

则 $f(z)$ 单叶。常数 $\frac{\pi^2}{4}$ 是最佳的。

证 微分方程 $u''+\frac{\pi^2}{4}u=0$ 有解 $u(x)=\cos\frac{\pi}{2}x>0$ $(-1<x<1)$。所以根据定理 6.10 就可由(14)式推出 $f(z)$ 在D内单叶。而由函数 $e^{\lambda z}(\lambda>\pi)$ 非单叶，有 $q(z)=-\frac{1}{4}\lambda^2$，从而表明(14)式中的$\frac{\pi^2}{4}$ 是最佳的。

这方面的更进一步的结果，可参看希尔 (Hille) 关于微分方程的书第十一章以及诸如 Nehari 1967; Friedland and Nehari 1970; Bers 1972 (277 页); Hayman 1973; Herold 1974。

问　题

1. 证明：若对 $z\in D$，$|q(z)|\leqslant\frac{2}{1-|z|^2}$，则 $f(z)$ 单叶 (Pokornyi 1951)。

2. 设 $f(z)$ 在D内解析且 $|f''(z)|\leqslant 2\sqrt{2}|f'(z)|$，证明 $f(z)$ 在D内单叶。

3. 若 $\iint_{|z|<1}|q(z)|\,d\Omega\leqslant\pi$，证明 $f(z)$ 在D内单叶 (D. London 1962)。

4. 试由应用定理 6.2 于函数

$$f(z,t)=\frac{w_1(e^{-t}z)+(e^t-e^{-t})zw_1'(e^{-t}z)}{w_2(e^{-t}z)+(e^t-e^{-t})zw_2'(e^{-t}z)}$$

以证明推论 6.4，其中 $w_1(z)$，$w_2(z)$ 是 (5) 的两个适当的无关解 (Ahlfors 1963; Becker 1972)。

第七章 极值问题与变分

我们来研究在 S 类(或某个其它单叶函数类)上给定的一个实值泛函的最大值问题．变分方法的思想是，作出极值函数 f 在 S 内的微小变分 f_λ．因为这一变分不会使所给泛函的值增加，所以便得到极值函数所满足的一个关系式．

我们将沿用戈鲁辛的变分方法，并用以导出关于极值函数的谢菲尔微分方程

$$(*)\qquad f'(z)^2 f(z)^{-2} p(f(z)) = z^{-2} q(z).$$

这个方程提供了关于极值函数及其象域的许多有趣的定性结果(也可参看 Schaeffer and Spencer)，不过在绝大多数情形，微分方程(*)含有未知参数，这使得极值函数难以确定．

对于线性极值问题，第一节中讲述的极值点方法提供了一种不同的研究手段．

7.1 极值问题与极端点

设 $\mathscr{A}$ 是某个固定区域 $G\subset\mathbb{C}$ 内所有解析函数的复线性空间，具有局部一致收敛拓扑．设 Φ 是在 $\mathscr{A}$ 的某个子空间 $\mathscr{F}$ (不必线性)上定义的实值泛函．我们称 $f\in\mathscr{F}$ 是关于 Φ 和 $\mathscr{F}$ 的**极值函数**，如果对任意的 $g\in\mathscr{F}$ 有

$$(1)\qquad \Phi[f]\geqslant\Phi[g].$$

如果 $\mathscr{F}$ 是紧的，并且 Φ 在 $\mathscr{F}$ 上连续，那末至少存在着一个极值函数．

若对于 $f_1, f_2\in\mathscr{F}$ 及 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，只要 $\lambda f_1+(1-\lambda)f_2\in\mathscr{F}$，就有

$$(2)\qquad \Phi[\lambda f_1+(1-\lambda)f_2]\leqslant\lambda\Phi[f_1]+(1-\lambda)\Phi[f_2],$$

则称 $\mathscr{F}$ 上的泛函 Φ 是**凸的**．实线性泛函是特殊的凸泛函．$\Phi[f]=$

$|f(z_0)|$（$z_0 \in G$ 固定）则是非线性凸泛函的一个例子。

对于某个 $f \in \mathscr{F}$，若不存在不同的函数 f_1，$f_2 \in \mathscr{F}$ 及 $0 < \lambda < 1$，使得

$$f = \lambda f_1 + (1-\lambda) f_2, \tag{3}$$

则称 f 是 $\mathscr{F}$ 的一个极端点．这一定义不涉及任何特定的泛函．极端点概念的重要性是通过克莱因－密尔曼（Krein-Milman）定理表现出来的．这里只对我们所需要的特殊情形证明这个定理；我们的证明中没有用到不可数选择公理．

定理 7.1（克莱因－密尔曼） 设 $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ 并且是紧的．若 Φ 是 $\mathscr{F}$ 上的连续凸泛函，则存在极端点 $f \in \mathscr{F}$ 使得

$$\Phi[f] = \max_{g \in \mathscr{F}} \Phi[g]. \tag{4}$$

证 使（4）式成立的函数 $f \in \mathscr{F}$ 所组成的子空间 $\mathscr{F}_0$ 非空，并且仍然是紧的．$\mathscr{F}_0$ 的每个极端点必定也是 $\mathscr{F}$ 的极端点；事实上，若 $f \in \mathscr{F}_0$ 可表示成（3）式的形式，$f_1, f_2 \in \mathscr{F}$，则由（2）式和（4）式，

$$\begin{aligned}\Phi[f] &\leqslant \lambda\Phi[f_1] + (1-\lambda)\Phi[f_2] \\ &\leqslant \lambda\Phi[f] + (1-\lambda)\Phi[f] = \Phi[f],\end{aligned}$$

故有 $\Phi[f_1] = \Phi[f_2] = \Phi[f]$，因而 f_1，$f_2 \in \mathscr{F}_0$．

因此我们只需要证明紧空间 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{A}$ 有一个极端点．设 D_0 是一个固定圆盘，$\overline{D}_0 \subset G$，则连续泛函

$$\Psi[g] = \iint_{D_0} |g(z)|^2 d\Omega \quad (g \in \mathscr{F}_0) \tag{5}$$

必定有一个极值函数 $f \in \mathscr{F}_0$．我们证明这个函数 f 就是 $\mathscr{F}_0$ 的一个极端点．设（3）式成立，$f_1, f_2 \in \mathscr{F}_0$，则因 f 是极值函数而有

$$\begin{aligned}&\Psi[f] + \lambda(1-\lambda)\Psi[f_1 - f_2] \\ &= \iint_{D_0} (|\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2|^2 + \lambda(1-\lambda)|f_1 - f_2|^2) d\Omega \\ &= \iint_{D_0} (\lambda|f_1|^2 + (1-\lambda)|f_2|^2) d\Omega \\ &= \lambda\Psi[f_1] + (1-\lambda)\Psi[f_2] \leqslant \Psi[f],\end{aligned}$$

因此 $\Psi[f_1 - f_2] = 0$，故由（5）式及恒等定理推出 $f_1 = f_2$．

鉴于 $D=\{|z|<1\}$ 内标准化单叶函数的空间 S 是紧的(定理 1.7),下面的布利克曼的结果(Brickman 1970)说明了类 S 的极端点是有用处的.

定理 7.2 若 f 是 S 的极端点,则 $\mathbb{C}\setminus f(D)$ 是伸向 ∞ 的一条单一若当弧;它同每个圆周 $\{|w|=r\}$ 至多交于一点.

于是由克莱因-密尔曼定理推知,对于每个凸函数,至少有一个极值函数的象域具有这一形式.

证 假定存在不同的点 $a, b\in\mathbb{C}\setminus f(D)$, $|a|=|b|$, 则函数

(6) $$h(z)=\sqrt{(a-f(z))(b-f(z))}=\sqrt{ab}+cz+\cdots$$

在 D 内解析,其中

$$c=h'(0)=-\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=-\cos\left(\frac{1}{2}\arg a-\frac{1}{2}\arg b\right),$$

因而 $-1<c<1$. 于是两函数

(7) $$f_{\pm}(z)=(1\pm c)^{-1}[f(z)\pm h(z)\mp\sqrt{ab}]=z+\cdots$$

在 D 为解析,可验证 $f_+(z)\neq f_-(z)$, 并且有

(8) $$f(z)=\frac{1}{2}(1+c)f_+(z)+\frac{1}{2}(1-c)f_-(z),$$

$0<\frac{1}{2}(1\pm c)<1$. 经简单计算得到

$$f(z)=f_{\pm}(z)\left[\sqrt{ab}\pm\frac{1\pm c}{2}f_{\pm}(z)\right]\Big/[\sqrt{ab}\pm f_{\pm}(z)].$$

由于 $f(z)$ 单叶而推出 $f_{\pm}(z)$ 单叶. 故由(7)式知 $f_{\pm}\in S$. 因而(8)式同 f 是 S 的极端点的假设相矛盾.

于是 $w\mapsto|w|$ 是 $\mathbb{C}\setminus f(D)$ 的连续内射映照,它的象是无界的连通闭集(因 $\mathbb{C}\setminus f(D)$ 如此),因而是閉的半直线. 这就推知 $\mathbb{C}\setminus f(D)$ 是一条伸向 ∞ 的若当弧.

给出极端点的其它有趣应用的有诸如 T. H. MacGregor 1972 和 Brannan, Clunie and Kirwan 1973. 另一方面,正如施普林格(Springer 1955)所指出,按照这一概念,紧空间 Σ_0(定理 1.7)的极端点又太多了,以致于没有什么用处.

例 7.1 我们证明每个满足 $\text{area}E = \text{area}[\mathbf{C}\backslash g(\Delta)] = 0$ 的函数 $g \in \Sigma_0$ 都是 Σ_0 的极端点。假定 $g = \lambda g_1 + (1-\lambda)g_2$ $(0 < \lambda < 1)$, $g_1, g_2 \in \Sigma_0$. 则 g_1 与 g_2 的系数 b_n' 与 b_n'' 满足 $b_n = \lambda b_n' + (1-\lambda)b_n''$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 故由面积定理 (7.2 节) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda|b_n'|^2 + (1-\lambda)|b_n''|^2 - \lambda(1-\lambda)|b_n' - b_n''|^2)$$

$$\leqslant \lambda + (1-\lambda) - \lambda(1-\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n' - b_n''|^2 \leqslant 1.$$

如果 $\text{area}[\mathbf{C}\backslash g(\Delta)] = 0$, 则左端的和为 1, 从而推出 $b_n' = b_n''$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 因此 $g_1 = g_2$.

问　　题

1. 试证 Σ 没有极端点.

2. 试利用定理 7.13 证明 S 中具有实系数的函数的子类只具有如下形式的极端点

$$z(1 - 2z\cos t + z^2)^{-1} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

(Brickman, MacGregor and Wilken 1971).

3. 设 f 是 S 的极值点, 且 $f \prec g$. 试证明函数 $g(z)/g'(0)$ 是 S 的极端点.

7.2 变分

1. 以 $\mathscr{A}$ 表示 D 内解析函数的空间. 给定点 $z_\mu(\mu = 1, 2, \cdots, m)$, $0 < |z_\mu| < 1$, 以及重数 $l_\mu \geqslant 1$ (说 $m = 0$, 是指没有这样的点). 再设 $l_0 \geqslant 0$, 置

(1) $$n = l_0 + l_1 + \cdots + l_m.$$

对于 $\mathscr{A}$ 中的函数 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$, 我们考虑具有分量

(2) $$a_k(k = 2, \cdots, l_0 + 1),\ f^{(k)}(z_\mu) \quad (k = 0, \cdots, l_\mu - 1;\ \mu = 1, \cdots, m)$$

的复 n 维向量 $v(f)$ ($i_0=0$ 时意味着 $v(f)$ 没有系数分量). 在 S 类中,由于作了标准化,这时系数起着特殊的作用. 因类 S 是紧的,故集合

$$V=\{v(f):f\in S\}\subset \mathbf{C}^n$$

也是紧的.

设 $X(w)$ 是在 V 的某个开邻域内可微的实值函数. 我们定义 S 上连续泛函 Φ 为

(3) $$\Phi[f]=X(v(f))=X(a_2,\cdots,a_{i_0+1},\ f(z_1),\cdots,f^{(l_1-1)}(z_1),\cdots).$$

这种形式的泛函称为有限度泛函,由(1)式确定的数 n 称为 Φ 的度数. X 的微分由下式给出:

(4) $$dX=2\mathrm{Re}[X_w dw],\qquad X_w\equiv\left(\frac{\partial X}{\partial w_1},\cdots,\frac{\partial X}{\partial w_n}\right).$$

由于以(2)为分量的向量函数 v 线性,故由(3)式和(4)式推出,对于 $f\in S$ 与 $h\in\mathscr{A}$ 有

(5) $$\Phi[f+\lambda h]=\Phi[f]+\lambda\mathrm{Re}\Lambda[f;h]+o(\lambda)(\lambda\to 0),$$

其中

(6) $$\Lambda[f;h]\equiv 2X_w(v(f))v(h).$$

对固定的 $f\in S$, $\Lambda[f;\cdot]$ 是 $\mathscr{A}$ 上的一个线性复泛函, 我们称 Λ 为 Φ 的复导数. 若 $h(z)=c_0+c_1z+\cdots$, 则由(2)式知复导数可表为

(7) $$\Lambda[f;h]=\sum_{k=0}^{i_0-1}\gamma_{0k}(f)c_{k+1}+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{k=0}^{l_\mu-1}\gamma_{\mu k}(f)h^{(k)}(z_\mu).$$

我们约定 $\bar{\Lambda}[f;h]=\overline{\Lambda[f;h]}$, 方便时我们还把 $\Lambda[f;h]$ 写成 $\Lambda[f;h(z)]$.

例 7.2 选取 $i_0=1$, $m=1$, $l_1=2$. 因为对于 $f\in S$ 有 $f'(z_1)\neq 0$, 故函数 $X(w_1,w_2,w_3)=\mathrm{Re}w_1+|w_3|$ 在 V 的某个邻域内可微. 泛函

$$\Phi[f]=X(v(f))=\mathrm{Re}a_2+|f'(z_1)|$$

的度数是 3，其复导数为

$$A[f;h]=c_2+|f'(z_1)|f'(z_1)^{-1}h'(z_1).$$

另一方面，泛函 $|a_2|+|f'(z_1)|$ 却不满足我们的假设条件，因为 $|w_1|+|w_2|$ 对 $w_1=0$（即泛函在 $a_2=0$ 时）是不可微的。

若 $f_\lambda\in S$ $(0\leqslant\lambda<\lambda_0)$，$f_0=f$，并且

$$f_0(z)=\frac{\partial}{\partial\lambda}f_\lambda(z)|_{\lambda=0}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f_\lambda(z)-f(z)}{\lambda} \tag{8}$$

在 D 内局部一致地存在，则称函数族 f_λ 为 f 在 S 内的一个变分。从(4)式与(6)式推知，对于 f 的每个变分有

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Phi[f_\lambda]|_{\lambda=0}=\mathrm{Re}A[f;\dot f_0]. \tag{9}$$

引理 7.1 设 Φ 为类 S 上的有限度泛函。若 $f\in S$ 是 Φ 的极值函数，f_λ 是 f 在 S 内的变分，则

$$\mathrm{Re}A[f;\dot f_0]\leqslant 0. \tag{10}$$

这一基本的不等式可立即从(9)式推出，因为由极值函数的定义有 $\Phi[f_\lambda]\leqslant\Phi[f]$。

例 7.3 一个简单而有用的变分是娄威纳变分，它是由在象域边界作一小段割线随后重新标准化而得到。考虑寇勃函数的旋转

$$g(z)=z(1+\bar\zeta z)^{-2}\quad(|\zeta|=1).$$

若 $\lambda>0$，则 $g^{-1}(e^{-\lambda}g(z))=e^{-\lambda}z+\cdots$ 把 D 映照成减去某条割线的 D，并且

$$f_\lambda(z)=e^{\lambda}f(g^{-1}(e^{-\lambda}g(z)))=z+\cdots \tag{11}$$

属于 S。我们求得

$$\begin{aligned}\dot f_0(z)&=\frac{\partial}{\partial\lambda}f_\lambda(z)|_{\lambda=0}\\&=f(z)-\frac{g(z)}{g'(z)}f'(z)=f(z)-zf'(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}.\end{aligned}$$

因此由引理 7.1 我们得到：

引理 7.2 设 Φ 是类 S 上的有限度泛函。若 $f\in S$ 是 Φ 的极值函数，则

$$(12)\quad \mathrm{Re}\Lambda\left[f;\ zf'(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right]\geqslant \mathrm{Re}\Lambda[f;f(z)]\quad (|\zeta|=1).$$

2. 变分方法的关键是要构造出比较有用的变分。谢菲尔(1938b, c, 1943)首先构造了一些有用的变分；也可参看 Schaeffer 和 Spencer 1943，他们的书的第二章，以及 Duren 和 Schiffer 1962/63。在 Golusin 1946b（也见他的书的第三、四章）中则采取了不同的途径。下面我们来叙述戈鲁辛的变分方法。

如果函数

$$(13)\qquad h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

在 $r<|z|<1$ 内解析，我们约定

$$(14)\qquad h^*(z)=\mathrm{Re}\,c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n+\bar{c}_{-n})z^n\quad (|z|<1),$$

即把 $h(z)$ 的负幂项换为具有共轭系数的正幂项。

定理 7.3 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，且 $f(0)=0, f'(0)>0$。假定 $g_\lambda(z)$ $(0\leqslant\lambda<\lambda_0)$ 在 $R=\{r<|z|<1\}$ 内单叶，$g_0(z)=f(z)(z\in R)$，并且在 R 内局部一致地有

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}g_\lambda(z)|_{\lambda=0}=zf'(z)h(z).$$

再设 F_λ 是 $g_\lambda(R)$ 同 $\mathbf{C}\backslash g_\lambda(R)$ 的有界分集之并。若单叶函数 $f_\lambda(z)$ 把 D 映照成 F_λ 使得 $f_\lambda(0)=0, f'_\lambda(0)>0$，则 $f_0(z)=f(z)$，并且在 D 内局部一致地有

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}f_\lambda(z)|_{\lambda=0}=zf'(z)h^*(z).$$

证 (a) 我们可以把 g_λ 表为

$$(17)\qquad g_\lambda(z)=f_\lambda(\varphi_\lambda(z))\quad (z\in R, 0\leqslant\lambda<\lambda_0),$$

其中 $\varphi_\lambda(z)$ 在 R 内单叶。简单的拓扑命题表明，当 $|z|\to1$ 或 $|z|\to r$ 时 $|\varphi_\lambda(z)|\to1$。故由反射原理知：

(i) $\varphi_\lambda(z)$ 在 $r<|z|<r^{-1}$ 内亚纯，并且当 $|z|=1$ 时有 $|\varphi_\lambda(z)|=1$，或者，

(ii) $\varphi_\lambda(z)$ 在 $r^2<|z|<1$ 内亚纯，并且当 $|z|=r$ 时有 $|\varphi_\lambda(z)|=1$。

设 $\{\lambda_k\}$ 是满足 $\lambda_k\to 0(k\to\infty)$ 并使得 $f^*(z)=\lim\limits_{k\to\infty}f_{\lambda_k}(z)$ 在D内局部一致地存在的任一序列。因 $g_{\lambda_k}(R)\subset F_{\lambda_k}=f_{\lambda_k}(D)$，并且由(15)式，$g_{\lambda_k}(z)$ 在R内局部一致收敛于 $g_0(z)=f(z)$，从而推出 $f(R)\subset f^*(R)$。由于两函数 f 和 f^* 均在D内解析单叶，因而也就有 $f(D)\subset f^*(D)$。于是由(17)式当 $k\to\infty$ 时，

(18) $$\varphi_{\lambda_k}(z)\to\varphi^*(z)\equiv f^{*^{-1}}(f(z))$$

在R内为局部一致收敛。这就推出当 $\lambda=\lambda_k$ 充分小时情况(ii)不会发生，所以条件(i)必成立。再从(18)式经反射得出当$|z|=1$时有$|\varphi^*(z)|=1$。同时由(18)式及标准化条件又有$\varphi^*(0)=0$，$\varphi^{*\prime}(0)>0$。于是 $\varphi^*(z)\equiv z$，从而 $f^*(z)\equiv f(z)$。

因为 $\{f_\lambda\}$ 是正规族，我们断言，当 $\lambda\to 0$ 时，

(19) $\quad f_\lambda(z)\to f(z)$ 　　　　在D内为局部一致收敛，

(20) $\quad \varphi_\lambda(z)=f_\lambda^{-1}(g_\lambda(z))\to z$ 　在R内为局部一致收敛。

必要时可变更 λ_0 的值，故不妨设对于 $0\leqslant\lambda<\lambda_0$ 条件(i)成立，并且 $\varphi_\lambda(z)\neq 0\ (z\in R)$。

(b) 设 $\sqrt{r}<\rho<1$，令

(21) $$p_\lambda(z)=\frac{f_\lambda(z)-f(z)}{\lambda zf'(z)},\qquad M_\lambda=1+\max_{|\zeta|\leqslant\rho}|p_\lambda(\zeta)|.$$

由(15)式知

(22) $$q_\lambda(z)=\frac{g_\lambda(z)-f(z)}{\lambda zf'(z)}\to h(z)\quad(\lambda\to 0)$$

在R内为局部一致收敛。由于沿着圆周 $|z|=1$ 辐角 $\arg\varphi_\lambda(z)$ 增加2π，故由条件(i)，函数

(23) $$\phi_\lambda(z)\equiv\frac{1}{\lambda}\log[z^{-1}\varphi_\lambda(z)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n(\lambda)z^n$$

在 $r<|z|<r^{-1}$ 内解析并且当 $|z|=1$ 有 $\mathrm{Re}\phi_\lambda(z)=0$。因此

$$b_{-n}(\lambda) = -\overline{b_n(\lambda)} \tag{24}$$

$(n \geqslant 1), b_0(\lambda) = i\beta(\lambda), \beta(\lambda) \in \mathrm{R}.$

从(17),(21),(22)和(23)式推出

$$\begin{aligned}
&\phi_\lambda(z) - q_\lambda(z) + p_\lambda(z) \\
&= \left[\frac{\lambda\phi_\lambda(z)}{\exp(\lambda\phi_\lambda(z)) - 1} \frac{(\varphi_\lambda(z) - z)f'(z)}{f_\lambda(\varphi_\lambda(z)) - f_\lambda(z)} - 1\right] \\
&\quad \times (q_\lambda(z) - p_\lambda(z)),
\end{aligned}$$

并且当 $\lambda \to 0$ 时方括号内的表达式在R内局部一致地趋于 0. 事实上,由(23)与(20)式, 表达式中的第一个商趋于 1, 而由(19)与(20)式,第二个商也趋于 1. 于是从(21)与(22)式推出

$$|\phi_\lambda(z) - q_\lambda(z) + p_\lambda(z)| \leqslant M_\lambda\eta_\lambda \quad (\rho^2 < |z| < \rho), \tag{25}$$

其中 η_λ 当 $\lambda \to 0$ 时趋于 0;并且由(23)式得到对于 $n = 0, 1, \cdots,$ 有

$$\left|b_{-n}(\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho^2} q_\lambda(z) z^{n-1} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho^2} p_\lambda(z) z^{n-1} dz\right| \leqslant \rho^{2n} M_\lambda \eta_\lambda.$$

由于 $p_\lambda(z)$ 在D内解析且 $p_\lambda(0)$ 为实数, 故上式第二个积分当 $n \geqslant 1$ 时为零,当 $n = 0$ 时为实数. 于是, 由(24),(22)和(13)式就有

$$|\overline{b_n(\lambda)} + c_{-n}| \leqslant \rho^{2n} M_\lambda \eta'_\lambda, \quad |\beta(\lambda) - \mathrm{Im}c_0| \leqslant M_\lambda \eta'_\lambda.$$

因此,从(13),(14)和(24)式我们得到对于 $|z| = \rho$ 有

$$\begin{aligned}
&|h(z) - h^*(z) - \phi_\lambda(z)| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_{-n} + \overline{b_n(\lambda)}|\rho^{-n} + |\mathrm{Im}c_0 - \beta(\lambda)| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} |\overline{c_{-n}} + b_n(\lambda)|\rho^n \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (\rho^n + \rho^{-n})\rho^{2n} M_\lambda \eta'_\lambda \leqslant M_\lambda \eta''_\lambda \quad (\eta''_\lambda \to 0).
\end{aligned} \tag{26}$$

现在我们利用(25),(26)和(22)式就 $|z| = \rho$ 来估计两函数之差

(27) $|p_\lambda(z)-h^*(z)|\leqslant|\phi_\lambda(z)-q_\lambda(z)+p_\lambda(z)|$

$$+|h(z)-h^*(z)-\phi_\lambda(z)|+|q_\lambda(z)-h(z)|.$$

从 (21) 式我们首先得到 $M_\lambda\leqslant \text{const}+M_\lambda\eta_\lambda^{\gamma''}$, $\eta_\lambda^{\gamma''}\to 0$; 即知 $\lambda\to 0$ 时 M_λ 保持有界。于是，从 (27) 式我们就得到对于 $|z|=\rho$, $|p_\lambda(z)-h^*(z)|$ 随 $\lambda\to 0$ 而一致地趋于零，而由(21)式这就意味着(16)式成立。

推论 7.1 设Φ是类S上的有限度泛函，若 $f\in S$ 是 Φ 的极值函数，则在定理7.3的假设条件下有

(28) $$\operatorname{Re}\Lambda[f;\ zf'(z)h^*(z)-f(z)h^*(0)]\leqslant 0.$$

证 f_λ 的标准化函数 $\tilde{f}_\lambda(z)=f_\lambda(z)/f_\lambda'(0)$ 属于 S，它们构成 f 的一个变分。因由 (16) 式，$f_\lambda'(0)=1+\lambda h^*(0)+o(\lambda)$ $(\lambda\to 0)$，故推知

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\tilde{f}_\lambda(z)|_{\lambda=0}=zf'(z)h^*(z)-f(z)h^*(0),$$

于是从引理 7.1 便得出(28)式。

下一个引理对大多数应用问题都适用。

引理 7.3 设 $f(z)$ 在D内解析单叶。假定有理函数 $\phi(w)$ 在 $\partial f(D)$ 上没有有限极点，在∞至多有单极点，则存在 $r<1$ 与 $\lambda_0>0$，使得

(29) $$g_\lambda(z)=f(z)+\lambda\phi(f(z))\quad(0\leqslant\lambda<\lambda_0)$$

在 $R=\{r<|z|<1\}$ 内单叶。若 $\phi(w)$ 在 $f(D)$内解析，则 $g_\lambda(z)$ 在D内单叶。

证 可选取 $r<1$ 使得 $\overline{f(R)}$ 不包含 $\phi(w)$ 的有限极点，于是对某个常数K有

$$|\phi(w_1)-\phi(w_2)|\leqslant K|w_1-w_2|\quad(w_1,w_2\in\overline{f(R)}).$$

从而对于 $z_1,z_2\in R$ 有

$$|g_\lambda(z_1)-g_\lambda(z_2)|\geqslant|f(z_1)-f(z_2)|(1-\lambda K),$$

因此当 $0<\lambda<K^{-1}$ 时，$g_\lambda(z)$ 在R内单叶。引理最后一个断语可以用同样的方法证明。

上述诸结果有种种推广。丢伦，谢菲尔和巴本科还考虑了变

分的二阶导数 $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^2 f_\lambda(z)$；(见 Duren 和 Schiffer 1962—63; Babenko 1970. 在 $f_\lambda(z)$ 解析依赖于 λ 的条件下，戈鲁辛(他的书的第三章)作出了定理7.3到所有这类导数的一种推广。

利用娄威纳理论，可以建立另一种变分方法（参看 Kufarev 1956, 1963, *G. S.* Goodman 1968, Kochetkov 1971)。谢非尔 (1938b) 建立的境界变分对多连通区域也适用。阿列克山德洛夫与索罗金 (Aleksandrov *and* Sorokin 1967) 则把戈鲁辛变分方法推广到了多连通区域。查尔缉斯基(1955)和 *A. W.* 古德曼 (*A. W.* Goodman 1958)还建立了其它的变分方法。

问　　题

1. 设 Φ 是 S 上的泛函，并且有复导数 Λ. 试利用马提 (Marty 1934) 变分

$$e^{-i\lambda}f(e^{i\lambda}z) \quad 与 \quad \frac{f\left(\frac{z+\zeta\lambda}{1+\bar{\zeta}\lambda z}\right)-f(\lambda\zeta)}{(1-|\zeta|^2\lambda^2)f'(\zeta\lambda)}$$

证明每个极值函数 $f\in S$ 满足

$$\operatorname{Im}\Lambda[f;zf'(z)-f(z)]=0,$$

$$\Lambda[f;f'(z)-1-2a_2f(z)]=\bar{\Lambda}[z^2f'(z)].$$

2. 试证明对于某个固定的 n 使 $\operatorname{Re}a_n$ 达到最大值的函数 $f\in S$ 满足：

$$(n+1)a_{n+1}-2a_2a_n-(n-1)\bar{a}_{n-1}=0,\quad \operatorname{Im}a_n=0.$$

3. 试证明 $\mathscr{A}$ 上所有连续线性泛函 Λ 均具有如下形式：

$$\Lambda[f]=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n\quad (f(z)=a_0+a_1z+\cdots\in\mathscr{A}),$$

其中 $\{b_n\}$ 是满足 $\limsup\limits_{n\to\infty}|b_n|^{1/n}<1$的某个序列. (Toeplitz 1949).

7.3　谢非尔微分方程

1. 我们应用定理 7.3 来导出关于极值函数的谢非尔微分方程 (Schiffer 1943, Schaeffer and Spencer 1943).

定理 7.4　设 Φ 为类 S 上的 n 度泛函且具有复导数 Λ. 假定

$f \in S$ 是 Φ 的极值函数，则

(1) $$\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 p(f(\zeta)) = q(\zeta) \quad (\zeta \in D),$$

其中函数

(2) $$p(w) = \Lambda\left[f; \frac{f(z)^2}{w - f(z)}\right]$$

是次数不超过 n 的有理函数．函数

(3) $$q(\zeta) = \frac{1}{2}\Lambda\left[f; zf'(z)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right] + \frac{1}{2}\bar{\Lambda}\left[f;\ zf'(z)\frac{1 + \bar{\zeta}z}{1 - \bar{\zeta}z}\right] - \mathrm{Re}\Lambda[f;\ f(z)]$$

是次数不超过 $2n$ 的有理函数，$|\zeta| = 1$ 时 $q(\zeta) \geqslant 0$，并且在 $|\zeta| = 1$ 上至少有一个偶数阶零点．

证 (a) 设 $0 < |\zeta| < 1$，$a \in \mathbb{C}$．由引理 7.3，函数

(4) $$g_\lambda(z) = f(z) + \frac{a\lambda f(z)^2}{f(z) - f(\zeta)} \quad (0 \leqslant \lambda < \lambda_0)$$

在 $r < |z| < 1$ 内单叶；由定理 7.3，与 $g_\lambda(z)$ 相应的函数 $f_\lambda(z)$ 是谢非尔的内变分．此时，(7.2.15)式的函数 $h(z)$ 为

(5) $$h(z) = \frac{af(z)^2}{zf'(z)(f(z) - f(\zeta))}.$$

此函数在 D 内除去具有留数 $ab\zeta$ 的单极点 ζ 外解析，其中

(6) $$b = \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2.$$

故由(7.2.14)式

$$h^*(z) = h(z) - \frac{ab\zeta}{z - \zeta} + \frac{\overline{ab\zeta}z}{1 - \bar{\zeta}z} - i\mathrm{Im}ab = h(z) + \frac{ab}{2}\frac{\zeta + z}{\zeta - z} + \frac{\overline{ab}}{2}\frac{1 + \bar{\zeta}z}{1 - \bar{\zeta}z}.$$

由于 $\Lambda[f;\cdot]$ 是一个复线性泛函，故从推论 7.1 得到

$$\mathrm{Re}\,a\Lambda\left[f; \frac{f(z)^2}{f(z) - f(\zeta)} + \frac{b}{2}zf'(z)\frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{b}{2}f(z)\right]$$

$$+\operatorname{Re}\bar{a}\Lambda\left[f;\frac{\bar{b}}{2}zf'(z)\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}-\frac{\bar{b}}{2}f(z)\right]\leqslant 0.$$

在第二个表达式中取复共轭，并由于 a 是任意复数，故可化为

$$\Lambda\left[f;\frac{f(z)^2}{f(z)-f(\zeta)}\right]+\frac{b}{2}\Lambda\left[f;zf'(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}-f(z)\right]$$

$$+\frac{b}{2}\bar{\Lambda}\left[f;zf'(z)\frac{1+\bar{\zeta}z}{1-\bar{\zeta}z}-f(z)\right]=0,$$

由(6)式知此式等价于(1)式。

(b) 现在来计算 $p(w)$。若以 $\Phi_k(w)$ 表示 Σ 类中函数 $f(z^{-1})^{-1}$ 的 k 次法贝尔多项式，则由(3.1.4)式有

$$(7)\qquad \frac{f(z)^2}{w-f(z)}=\frac{1}{f(z)^{-1}-w^{-1}}-f(z)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\Phi_k'(w^{-1})-a_k\right)z^k,$$

其中 $k^{-1}\Phi_k'(w^{-1})-a_k$ 的展开形式为 $w^{-(k-1)}+\cdots+a_k w^{-1}$，而且有

$$(8)\qquad \left(\frac{d}{dz}\right)^k\frac{f(z)^2}{w-f(z)}=\frac{k!f(z)^2f'(z)^k}{(w-f(z))^{k+1}}$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi_{kj}(z)}{(w-f(z))^j}\quad(k=1,2,\cdots),$$

其中函数 $\varphi_{kj}(z)$ 与 w 无关。

定义 $z_0=0$。设 $k_\mu(\mu=0,\cdots,m)$ 是使 (7.2.7) 式中的 $\gamma_{\mu,k_\mu-1}(f)\neq 0$ 的最大下标。因 $f(z_\mu)\neq 0$，$f'(z_\mu)\neq 0(\mu=1,\cdots,m)$，故由(2)，(7)，(8)及(7.2.7)式推知 $p(w)$ 具有如下形式

$$(9)\qquad p(w)=\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{j=1}^{k_\mu}\frac{\alpha_{\mu j}}{(w-f(z_\mu))^j},\ \alpha_{\mu k_\mu}\neq 0$$

$$(\mu=0,\cdots,m),$$

$l_0=0$ 时式中没有 $\mu=0$ 的项，$m=0$ 时没有 $\mu>0$ 的项。因此 $p(w)$ 是次数 $n'=k_0+\cdots+k_m\leqslant l_0+\cdots+l_m=n$ 的有

理函数。

其次我们来计算 $q(\zeta)$. 因

(10) $zf'(z)\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(ka_k+2\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)a_{k-j}\zeta^{-j}\right)z^k,$

(11) $\left(\dfrac{d}{dz}\right)^k\left(zf'(z)\dfrac{\zeta+z}{\zeta-z}\right)=\dfrac{k!\,z^2f'(z)}{(\zeta-z)^{k+1}}+\sum_{j=0}^{k}\dfrac{\psi_{kj}(z)}{(\zeta-z)^j},$

故由(3)式知 $q(\zeta)$ 具有如下形式:

$$(12)\qquad q(\zeta)=\sum_{\mu=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k_\mu}\frac{\beta_{\mu j}}{(\zeta-z_\mu)^j}+\sum_{j=1}^{k_\mu}\frac{\bar{\beta}_{\mu j}\zeta^j}{(1-\bar{z}_\mu\zeta)^j}\right)+\beta,$$

并且 $\beta_{\mu k_\mu}\neq 0$ $(\mu=0,\cdots,m)$, $\beta\in\mathbf{R}$. 因此 $q(\zeta)$ 的次数为 $2n'=2(k_0+\cdots+k_m)\leqslant 2n$.

(c) 由(3)式, $|\zeta|=1$ 时有

$$(13)\qquad q(z)=\operatorname{Re}\Lambda\left[f;\ zf'(z)\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right]-\operatorname{Re}\Lambda[f;\ f(z)],$$

由引理 7.2 其值非负. 因此在 $|\zeta|=1$上 $q(\zeta)$ 的一切零点为偶数阶。

由 (9) 式, 因 $p(\infty)=0$, $p(w)$ 在 $f(D)$ 内的零点个数 $l<n'-1$. 因 $f\in S$, 故从(1)式推知 $q(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 内恰有 l 个零点;,由于 $q(\zeta^{-1})=\bar{q}(\zeta)$, 因而在 $|\zeta|>1$ 内也同样.因此 $q(\zeta)$ 在 $|\zeta|=1$ 上的零点总重数为 $2n'-2l>0$.

2. 谢非尔微分方程(1)可用来获得关于极值区域(极值函数的象域 $f(D)$)的定性结果. 比较详尽的讨论可以在沙非尔与斯潘塞尔的书中找到;也可参看本书的下一章.

定理 7.5 设 Φ 是类 S 上的有限度泛函, $f\in S$ 是 Φ 的极值函数. 若

$$(14)\qquad X_w(v(f))\neq 0$$

(见(7.2.2)与(7.2.4)式),则 $p(w)\neq 0$, 并且 $\hat{\mathbf{C}}\backslash f(D)$ 是有限条解析弧的并, 这些解析弧只能在 ∞ 及 $p(w)$ 的有限零点相交.

假设条件(14)排除了一些平凡的情形,比如

$$\Phi[f]=-|f(z_1)-f^*(z_1)|^2,\qquad \frac{dX}{dw}=-2\mathrm{Re}[w-f^*(z_1)],$$

其中 f^* 是 S 中任意给定的函数，f^*是这个泛函的一个极值函数，这就意味着极值区域可以是 C 内任意给定的一个包含零点的区域。

证 从 (14)，(7.2.6)和 (7.2.7) 式推知对于某个 μ 和 k 有 $\gamma_{\mu k}(f)\neq 0$。因此(9)式表明 $p(w)\neq 0$，并且在 $\partial f(D)$ 上 $p(w)$ 无极点。从而在 ∂D 邻近谢非尔微分方程

$$\frac{p(f(z))}{f(z)^2}f'(z)^2=\frac{q(z)}{z^2}\tag{15}$$

至少局部可积。

设 $\zeta\in\partial D$，$\omega=f(\zeta)$，且以 $2\nu\geqslant 0$ 表示 $q(z)$ 在 ζ 的零点阶数。若 $\omega\neq\infty$ 是 $p(w)$ 的 μ 阶零点，$\mu\geqslant 1$，则当 $|z-\zeta|$ 充分小时，

$$f(z)=\omega+(z-\zeta)^{\frac{2(\nu+1)}{\mu+2}}[c_0+c_1(z-\zeta)+\cdots],\tag{16}$$

并且 $c_0\neq 0$，若 $\omega=\infty$，则当 $|z-\zeta|$ 充分小时，

$$f(z)=(z-\zeta)^{-\frac{2(\nu+1)}{\mu}}[c_0+c_1(z-\zeta)+\cdots],\tag{17}$$

并且 $c_0\neq 0$，其中$\mu\geqslant 1$是 $p(w)$ 在 ∞ 的零点阶数。

$p(\omega)\neq 0$ 且 $\omega\neq\infty$ 时，积分(15)式便知 $f(z)$ 把 ∂D 上包含 ζ 的某段弧映照成解析弧；如果 $\nu=0$，则该弧被扫描一次；如果 $\nu\neq 0$，则必有 $\nu=1$，该弧恰好被扫描两次且以 ω 为其一端。

$p(\omega)=0$ 且$\omega\neq\infty$ 时，则由(16)式知 $f(z)$ 把 ∂D 上包含ζ 的某段弧映照成在ω相交的两条解析弧，交成的角为 $2\pi\dfrac{\nu+1}{\mu+2}$。由于$f(z)$在D内单叶，因此至多存在有限多个$\zeta\in\partial D$使$p(f(\zeta))=p(\omega)=0$。若 $\omega=\infty$，则由(17)式知 $f(z)$ 把 ∂D 上包含ζ 的某段弧映照成在 ∞ 相交的两条解析弧，交成的内角为 $2\pi\dfrac{\nu+1}{\mu}$。因此，只有有限多个 $\zeta\in\partial D$ 使 $f(\zeta)=\infty$。

于是我们断定：极值函数 $f(z)$ 把 ∂D 映照成只在 ∞ 和 $p(w)$ 的有限零点处相交的有限多个解析弧段的并。顺便指出，用8.2节的术语，我们刚才所讨论的正是一个二次微分的轨线。

(b) 为了完成定理的证明还需说明 $\mathbf{C}\setminus f(D)$ 无内点。假定 $\mathbf{C}\setminus f(D)$ 包含圆盘 D_0。则由引理7.3，当 λ 充分小时函数

$$f_\lambda(z)=f(z)+\lambda e^{i\alpha}\frac{f(z)^2}{w-f(z)}=z+\cdots \tag{18}$$

$$(\alpha\in\mathbf{R},\ w\in D_0)$$

在 D 内单叶。于是 $f_\lambda\in S$ 是 f 的一个变分，故由引理7.1，对每个实数 α 有

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha}\Lambda\left[f;\frac{f^2}{w-f}\right]\leqslant 0\quad(w\in D_0)$$

因此从(2)式推出对于 $w\in D_0$ 有 $p(w)=0$。这是不可能的，因为 $p(w)\not\equiv 0$ 是一个有理函数。

对于线性泛函的极值区域我们可证明更多的结果（Schaeffer 和 Spencer 第七章，Golusin 1947，Schiffer 1968，Pfluger 1971a）。

定理 7.6 设 $\Phi[f]=\operatorname{Re}\Lambda[f]$，其中 Λ 是一个复线性泛函并具有如下形式

$$\Lambda[f]=\sum_{k=0}^{l_0-1}\gamma_{0k}a_{k+2}+\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{k=1}^{l_\mu-1}\gamma_{\mu k}f^{(k)}(z_\mu)\not\equiv 0. \tag{19}$$

则存在一极值区域，它的余集是一条伸向 ∞ 的解析弧并且其模严格递增。

证 显然，泛函(19)是 Φ 的复导数。假定对于某个有限点 $\omega\in\partial f(D)$，$p(\omega)=0$，则函数

$$f^*(z)=\frac{\omega f(z)}{\omega-f(z)}=z+\cdots \tag{20}$$

属于 S，并且也是 Φ 的一个极值函数，这是因为由(2)式，

$$A[f^*]-A[f]=A\left[\frac{\omega f}{\omega-f}-f\right]=p(\omega)=0.$$

若令 $w^*=\frac{\omega w}{\omega-w}$，就有

$$\begin{aligned}p^*(w^*)&=A\left[\frac{w^*f^*}{w^*-f^*}\right]-A[f^*]\\&=A\left[\frac{wf}{w-f}\right]-A[f]=p(w).\end{aligned}$$

于是，将(1)式应用于极值函数 f^* 表明，对于除去有限多个点之外的所有 $\zeta\in\partial D$，

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\omega}{\omega-f(\zeta)}\right)^2\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2p(f(\zeta))\\&\qquad=\left(\frac{\zeta f^{*\prime}(\zeta)}{f^*(\zeta)}\right)^2p^*(f^*(\zeta))\geqslant 0.\end{aligned}$$

将这一不等式同（应用于 f 的）(1) 式比较，便知对于 $\zeta\in\partial D$，$\frac{\omega}{\omega-f(\zeta)}$ 是实数．因此 $\partial f(D)$ 位于从 0 到 ω 的直线段上，故定理的结论对这一情况已得到证实．

于是不妨设对于 $\omega\in\partial f(D)$，$\omega\neq\infty$ 有 $p(\omega)\neq 0$．从定理 7.1 与 7.2 已经知道，对于某个极值函数 $f(z)$，$\hat{\mathbb{C}}\backslash f(D)$ 是一条其模递增的若当弧．而定理 7.5 则表明这条若当弧解析．

顺便提一下，对于线性泛函 Φ，如果(19)式中所有的 $\gamma_{\mu k}$ 都是实数，那末寇勃函数总是相应于该泛函的谢非尔微分方程的一个解 (Pfluger 1971a)．

例 7.4 考虑 S 中使泛函 $\Phi[f]=\mathrm{Re}\,a_{n+1}$ 取最大值的比伯巴赫系数问题．这是一个 n 度线性泛函的极值问题．容易看出极值函数的系数 a_{n+1} 是实数(见问题7.2.2)．由(7)式与(10)式，极值函数的谢非尔微分方程为

$$\begin{aligned}(21)\quad&\left(\frac{1}{n+1}\Phi'_{n+1}\left(\frac{1}{f(\zeta)}\right)-a_{n+1}\right)\frac{\zeta^2f'(\zeta)^2}{f(\zeta)^2}\\&\qquad=na_{n+1}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\nu a_\nu\zeta^{-(n-\nu+1)}+\nu\bar{a}_\nu\zeta^{n-\nu+1}\right),\end{aligned}$$

其中 $\Phi_{n+1}(w)$ 是 $f(z^{-1})^{-1}\in\Sigma$ 的 $n+1$ 次法贝尔多项式(见 3.1 节)。方程右端在 $|\zeta|=1$ 上非负且有零点.

先讨论第二项系数即 $n=1$ 的情形. 由(3.1.7)式得到

(22) $$\zeta^2 f'(\zeta)^2 f(\zeta)^{-3}=\zeta^{-1}+a_2+\zeta.$$

因 $q(e^{i\theta})=2\cos\theta+a_2$ 非负且有一个实零点，从而推出对于极值函数有 $a_2=2$.

第三项系数即 $n=2$ 的情形较困难. 因

$$\frac{1}{3}\Phi_3'(w)=(w-b_0)^2-b_1=(w+a_2)^2+a_3-a_2^2,$$

故由(21)式有

(23) $$\left(\frac{2a_2}{f(\zeta)}+\frac{1}{f(\zeta)^2}\right)\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2$$
$$=\zeta^{-2}+2a_2\zeta^{-1}+2a_3+2\bar{a}_2\zeta+\zeta^2.$$

不巧的是，未知的极值函数第二和第三项系数在微分方程中同时出现了. 因此，更确切地说谢非尔微分方程是关于极值函数的泛函微分方程. 关于方程(21)的解的讨论，可参看 Charzyński and Schiffer 1960a.

例 7.5 设 $0<x_1<1$, $|a|=1$. 考虑泛函

(24) $$\Phi[f]=\mathrm{Re}[a\log f(x_1)]\quad(f\in S).$$

其复导数为 $\Lambda[f;h]=aw_1^{-1}h(x_1)$, $w_1=f(x_1)$，而谢非尔微分方程则为

(25) $$\frac{aw_1}{f(\zeta)-w_1}\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2=q(\zeta),$$

$q(\zeta)$ 是二次有理函数，以某个 $\zeta_0\in\partial D$ 为其二重零点. 由 (12) 式,它以 x_1 和 x_1^{-1} 为单极点,并且(25)式表明 $q(0)=-a$. 由此知

(26) $$q(\zeta)=\frac{ax_1(1-\bar{\zeta}_0\zeta)^2}{(\zeta-x_1)(1-x_1\zeta)}$$
$$=-ax_1\bar{\zeta}_0\frac{(1-\bar{\zeta}_0\zeta)(1-\zeta_0\zeta^{-1})}{(\zeta-x_1)(\zeta^{-1}-x_1)},$$

因为当 $|\zeta|=1$ 有 $q(\zeta)\geqslant 0$, 从而推出 $\zeta_0=-a$. 将 (26) 式

两端除以$-a^{2)}$,然后取其平方根的一个分支,使得当 $\zeta=0$ 时取值为 $+1$, 从(25)式与(26)式得到

$$\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)\sqrt{1-\frac{f(\zeta)}{w_1}}}=\frac{\zeta^{-1}(1+\bar{a}\zeta)}{\sqrt{(1-x_1^{-1}\zeta)(1-x_1\zeta)}}$$

$$=\frac{\zeta^{-1}+\bar{a}}{\sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2}},$$

其中 $\xi=\frac{1}{2}(x_1+x_1^{-1})$. 积分之,得到

$$\begin{aligned}(27)\qquad &-2\log(1+\sqrt{1-w_1^{-1}f(\zeta)})+\log[\zeta^{-1}f(\zeta)]\\ &=-\log 2+\bar{a}\log(1+\xi)\\ &\quad-\log(1-\xi\zeta+\sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2})\\ &\quad-\bar{a}\log(\xi-\zeta+\sqrt{1-2\xi\zeta+\zeta^2}),\end{aligned}$$

其中的积分常数由 $f(\zeta)=\zeta+\cdots$ 所确定. 因 $f(x_1)=w_1$, 取 $\zeta=x_1$ 得到

$$(28)\qquad \log[x_1^{-1}f(x_1)]=-\log(1-x_1^2)+\bar{a}\log\frac{1+x_1}{1-x_1},$$

并且可以从(27)式求得极值函数.

我们来推导戈鲁辛 (1932) 的一个结果;这一结果可以和推论 3.5 与定理 6.5 相对照.

定理 7.7 若 $z\in D$, 则

$$(29)\qquad \left\{\log\frac{f(z)}{z}:f\in S\right\}$$

$$=\left\{s:|s+\log(1-|z|^2)|\leqslant\log\frac{1+|z|}{1-|z|}\right\}.$$

证 不妨设 $z=x_1$, $0<x_1<1$. 令 $a=e^{-i\alpha}(0\leqslant\alpha<2\pi)$. 已知泛函(24)的极值函数满足(28)式,因此对于每个 $f\in S$ 有

$$\mathrm{Re}\,e^{-i\alpha}\left[\log\frac{f(x_1)}{x_1}+\log(1-x_1^2)\right]\leqslant\log\frac{1+x_1}{1-x_1},$$

---

1) 此句系译者所加.

并且对上述极值函数等号成立. 由 α 的任意性知

$$W=\left\{\log\frac{f(x_1)}{x_1}:f\in S\right\}\subset B(x_1)$$

$$=\left\{\,|s+\log(1-x_1^2)|\leqslant\log\frac{1+x_1}{1-x_1}\right\},$$

并且 $\partial B(x_1)\subset W$. 因 $r^{-1}f(rz)$ $(0<r<1)$ 仍属于 S, 故推出当 $0<r<1$ 时有 $\partial B(rx_1)\subset W$. 于是有

$$B(x_1)=\{0\}\cup\bigcup_{0<r\leqslant 1}\partial B(rx_1)\subset W,$$

从而得到(29)式.

谢非尔微分方程对于极值问题有着大量的应用. 但一般地说要确定极值函数或泛函的最大值却很困难. 例如可参看 Aleksandrov 1963a,b 和 Popov 1965.

问　　题

1. 设 $g(z)=z+\cdots$ 在 D 内解析. 试证明在定理 7.4 的假设条件下有

$$\Lambda[f;\,g-f]=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\frac{q(\zeta)}{\zeta^{2}f'(\zeta)}\,g(\zeta)d\zeta,$$

其中 $r<1$ 充分接近于 1.

2. 考虑 $\mathrm{Re}\,a_{2n+1}$ 的最大值问题. 试证明函数 $z(1-z)^{-2}$ 和 $z(1-z^2)^{-1}$ 都是相应的谢非尔微分方程的解.

3. 在定理 7.5 的假设条件下, 试证明极值区域的余集至多是 $2n-1$ 条解析弧的并.

4. 设 $\Phi[f]=\mathrm{Re}\Lambda[f]$, 其中 Λ 的形式如(19)式. 试证明: 只要极值函数 f 不是宽勒函数的旋转, 则对于 $w\in\partial f(D)$ 总有 $\mathrm{Re}\,p(w)<0$ (Pfluger 1971a).

7.4 其它单叶函数类

1. 单位圆外单叶函数. 考虑在 $\Delta=\{|z|>1\}$ 内单叶的函数

(1) $$g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\quad(|z|>1)$$

的紧类 Σ_0. 以

(2) $\Phi_k(w) = w^k - kb_1 w^{k-1} + \cdots \quad (k = 1, 2, \cdots)$

表示 $g(z)$ 的法贝尔多项式(见 3.1 节).

我们只限于考虑一个给定的系数组合的最大值问题，即考虑如下形式的泛函:

(3) $$\Psi[g] = Y(b_1, \cdots, b_n) \quad (g \in \Sigma_0),$$

其中实值函数 $Y(w_1, \cdots, w_n)$ 在 $\{(b_1, \cdots, b_n): g \in \Sigma_0\}$ 的某个开邻域内可微. 对于 $h(z) = c_{-1}z + c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots$,其复导数为

(4) $$\Lambda^*[g; h] = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu c_\nu, \quad \gamma_\nu = \gamma_\nu(g) = 2Y_{w_\nu}(b_1, \cdots, b_n)$$

(对照 7.2 节). 我们来导出一个类似于谢非尔微分方程的方程(Springer 1951).

定理 7.8 假定 Σ_0 上的泛函 Ψ 由(3)式定义,并且其复导数由(4)式确定. 若 $g \in \Sigma_0$ 是 Ψ 的极值函数, 则

(5) $$\zeta^2 g'(\zeta)^2 p^*(g(\zeta)) = -q^*(\zeta),$$

其中

(6) $$p^*(w) = \Lambda^*\left[g; \frac{1}{g(z) - w}\right] = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\nu} \Phi_\nu'(w),$$

(7) $$q^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{n+1} (\beta_k \zeta^k + \bar{\beta}_k \zeta^{-k}) + \sum_{\nu=1}^{n} (\nu + 1) b_\nu \gamma_\nu,$$

$$\beta_k = \sum_{\nu=1}^{n-k} \nu b_\nu \gamma_{k+\nu} - \gamma_{k-1},$$

函数 $q^*(\zeta)$ 在 $|\zeta| = 1$ 上有零点，这些零点的总阶数不小于4,并且 $|\zeta| = 1$ 时 $q^*(\zeta) \geqslant 0$.

证 我们定义 S 上的泛函 $\Phi[f] = \Psi[g]$, 其中

(8) $$g(z) = f(z^{-1})^{-1} + a \quad \left(f \in S, \ a = \frac{1}{2} f''(0)\right).$$

这是有限型泛函. 由(4)式和(7.2.6)式得到

$$(9)\quad \Lambda[f;\tilde{h}(z)]=-\Lambda^*\left[g;\ (g(z)-a)^2\tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right)\right]\quad (\tilde{h}\in\mathscr{A}).$$

并且，由(4)式而有 $\Lambda^*[g;\text{const}]=0$.

设 $g\in\Sigma_1$ 是 Ψ 的一个极值函数，$a\in\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$. 则 $f(z)=\left(g\left(\frac{1}{z}\right)-a\right)^{-1}\in S$ 满足(8)式，因而是 Φ 的极值函数. 故可应用定理7.4. 由(9)式并根据(4)式和(3.1.4)式知 (7.3.2) 式所定义的函数 p 满足

$$p\left(\frac{1}{w-a}\right)=-\Lambda^*\left[g;\ \frac{(w-a)(g-a)}{g-w}\right]$$

$$=-\Lambda^*\left[\frac{(w-a)^2}{g-w}\right]=-(w-a)^2\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\nu}\Phi'_\nu(w).$$

而由(7.3.3)式定义的函数 q 则满足

$$-q(\zeta^{-1})=\frac{1}{2}\Lambda^*\left[g;\ zg'(z)\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right]$$

$$+\frac{1}{2}\Lambda^*\left[g;\ zg'(z)\frac{\zeta z+1}{\zeta z-1}\right]-\operatorname{Re}\Lambda^*[g;\ g(z)].$$

通过考虑 Σ_0 内初等变分 $e^{-i\lambda}g(e^{i\lambda}z)$，可以证明(7)式中最后一项必为实数. 因此根据谢非尔微分方程 (7.3.1)，经简短计算便得到(5)式，并且当 $|\zeta|=1$ 时 $q^*(\zeta)=q(\zeta^{-1})\geqslant 0$.

设 n' 是使 $\gamma_{n'}\neq 0$ 的最大下标，则由 (6) 式知 $p^*(w)$ 在 $g(\Delta)$ 内的零点个数 $l\leqslant n'-1$. 由(7)式知 $q^*(\zeta)$ 有 $2(n'+1)$ 个零点，并根据(5)式知其中有 l 个在 $|\zeta|>1$ 内，由对称性又知在 $|\zeta|<1$ 内也有 l 个零点. 因此在 $|\zeta|=1$ 上零点个数为 $2(n'+1-l)\geqslant 4$.

下面我们证明谢非尔 (1938c) 的一个结果，这个结果我们曾在 3.3 节从格隆斯基不等式导出过.

推论 7.2 若 $g\in\Sigma$，则 $|b_3|\leqslant\frac{2}{3}$.

证 不妨设 $b_0=0$，$b_2\geqslant 0$. 考虑 Σ_1 内 $\operatorname{Re}b_2$ 的最大值问题. 因由(2)式有 $\Phi_1(w)=w^2-2b_1$ 故从定理7.8 推知极值函数

满足

(10) $\zeta^2 g'(\zeta)^2 g(\zeta) = \zeta^3 - b_1\zeta - 3b_2 - \bar{b}_1\zeta^{-1} + \zeta^{-3}$，

并且当 $|\zeta| = 1$ 时上式小于或等于 0，于是

$$\frac{d}{dt}\left[g(e^{it})^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2} ie^{it}g'(e^{it})g(e^{it})^{\frac{1}{2}}$$

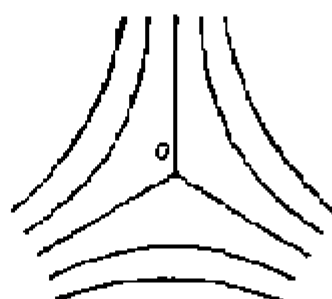


图 7.1 曲线 $\operatorname{Im} w^{\frac{3}{2}} = \mathrm{const}$

是实数. 从而 $\operatorname{Im}[g(e^{it})^{\frac{3}{2}}] = \mathrm{const}$.

由(1.1.3)式，点 $0 = b_0$ 属于 $\partial g(\Delta)$ 的凸包且容易证明 $0 \in \partial g(\Delta)$(见图 7.1)。因此对 $|\zeta| > 1$，(10)式右端不等于零，故可写成

$$\zeta^{-3}(\zeta - \zeta_1)^2(\zeta - \zeta_2)^2(\zeta - \zeta_3)^2$$
$$(|\zeta_\nu| = 1,\ \nu = 1, 2, 3).$$

同(10)式相比较有

$$1 - \frac{1}{2} b_1\zeta^{-2} - \frac{3}{2} b_2\zeta^{-3} + \cdots$$
$$= (1 - \zeta_1\zeta^{-1})(1 - \zeta_2\zeta^{-1})(1 - \zeta_3\zeta^{-1}).$$

而因 $\left|\frac{3}{2}\ b_2\right| = |\zeta_1\zeta_2\zeta_3| = 1$，即得 $b_2 = \frac{2}{3}$。

$\operatorname{Re} b_3$ 的最大值问题困难得多，但已为格拉贝定与谢菲尔(1955b) 所解决(见 4.4 节推论 4.9). 这时谢菲尔微分方程为

(11) $\zeta^2 g'(\zeta)^2 (g(\zeta)^2 - b_1)$

$$= \zeta^4 - b_1\zeta^2 - 2b_2\zeta - 4b_3 - 2\bar{b}_2\zeta^{-1} - \bar{b}_1\zeta^{-2} + \zeta^{-4}.$$

它的左端含有一个未知系数.

作为另一个应用我们给出格隆斯基不等式 (3.1.22) 的一个新证明 (Schiffer 1948, Golusin 1948, 1951)，从这一证明中可以看出，对于参数的每一选择，该不等式都是最佳的. 我们仍采用 3.1 节的记号.

定理 7.9 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbf{C}$. 若 $g \in \Sigma$，则

(12) $$\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_k\lambda_l \geqslant -\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k},$$

并且等号总是能够达到的.

证 因格隆斯基系数 b_{kl} 是 $b_1, \cdots, b_{k+l-1}$ 的多项式，从而泛函

(13) $$\Psi[g] = -\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_k\lambda_l \quad (g\in\Sigma_0)$$

的最大值问题同定理 7.8 中考虑的问题具有相同的形式. 若定义

(14) $$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k z^{k-1},$$

则由格隆斯基系数的定义(3.1.8)式推出

(15) $$\Psi[g] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C\int_C \varphi(z)\varphi(\zeta)\log\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\,dz\,d\zeta\right],$$

其中 $C=\{|z|=2\}$.

若 $h(z)=c_{-1}z+c_0+c_1z^{-1}+\cdots$，便知当 $\lambda\to+0$ 时，

$$\Psi[g+\lambda h]-\Psi[g]$$
$$=\lambda\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C\int_C\frac{h(z)-h(\zeta)}{g(z)-g(\zeta)}\varphi(z)\varphi(\zeta)\,dz\,d\zeta\right]+o(\lambda).$$

因而复导数 $\Lambda^*[g;h]$ 等于最后一个方括号内的量. 由 (6) 式便有

$$p^*(w)=-\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_C\int_C\frac{\varphi(z)\varphi(\zeta)}{(g(z)-w)(g(\zeta)-w)}\,dz\,d\zeta.$$

故从(3.1.4)式与(14)式得到

(16) $$p^*(w)=-\left(\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(z)}{g(z)-w}\,dz\right)^2$$
$$=-\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\Phi_k'(w)\right)^2.$$

$p^*(w)$ 是完全平方的事实，使我们能够作如下推导:

如果 $g\in\Sigma_0$ 是一个极值函数，则由 (16) 式及定理 7.8 知 $|\zeta|=1$ 时函数

(17) $$\zeta g'(\zeta)\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\,\Phi_k'(g(\zeta)) = \sqrt{q^*(\zeta)}$$

取实值．由(3.1.11)式，这个函数等于

$$\zeta\frac{d}{d\zeta}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{k}\Phi_k(g(\zeta))$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\zeta^k-\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\sum_{l=1}^{m}b_{kl}\lambda_l\right)\zeta^{-k}\quad(|\zeta|>1).$$

从而推出

$$\sum_{l=1}^{m}b_{kl}\lambda_l=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_k}{k} & 1\leqslant k\leqslant m,\\ 0 & k>m.\end{cases}\tag{18}$$

因此在(12)式中等号成立．由于 $g(z)$ 是泛函(13)在 Σ_0 中的极值函数，因而也是在 Σ 中的极值函数，这就证明了定理 7.9.

2. 不取若干指定值的单叶函数． 设 $v_1,\cdots,v_m(m\geqslant 1)$ 是在 $\mathbf{C}$ 内给定的不为零的点．考虑 D 内所有满足 $f(0)=0$, $f'(0)>0$ 及

$$f(z)\neq v_1,\cdots,v_m\quad(z\in D)\tag{19}$$

的解析单叶函数 $f(z)$ 的类． 我们对 $|f'(0)|$ 不作规范．由于 $|f'(0)|\leqslant 4|v_1|$，故由定理1.7(1.4节)容易推知，若添入 $f(z)\equiv 0$，就使这个函数类成为紧类．

设 $f(z)$ 是这个类中的一个函数．$z_1,\cdots,z_m$ 是 D 内不同的点且不等于零，$|a|=1$．由引理 7.3(7.2 节)，对于某个 $r<1$ 及某个 $\lambda_0>0$，函数

$$g_\lambda(z)=f(z)+\lambda af(z)\prod_{k=1}^{m}\frac{f(z)-v_k}{f(z)-f(z_k)}\quad(0\leqslant\lambda<\lambda_0)\tag{20}$$

在 $R=\{r<|z|<1\}$ 内单叶．而且对于 $l=1,\cdots,m$ 有

$$g_\lambda(z)-v_l$$

$$=(f(z)-v_l)\left[1+\lambda a\frac{f(z)}{f(z)-f(z_l)}\prod_{k\neq l}\frac{f(z)-v_k}{f(z)-f(z_k)}\right].$$

方括号内第二项在 R 内有界．由于在 D 内 $f(z)\neq v_l$，如取 λ_0 充分小，则在 R 内，$g_\lambda(z)\neq v_l$，$(l=1,\cdots,m)$.

设 $f_\lambda(z)$ 是按照定理 7.3 同 $g_\lambda(z)$ 相对应的 D 内单叶函数．

因 $v_l \in g_1(R)$，并且当 $\lambda \to 0$ 时 $f_\lambda(z)$ 在 D 内局部一致收敛于 $f(z)$，故由霍尔维茨定理推出对于 $z \in D$ 与充分小的 λ 有 $f_\lambda(z) \neq v_l$ $(l = 1, \cdots, m)$。因此 $f_\lambda(z)$ 是这一函数类中的一个变分。从(20)式与(7.2.16)式我们得到

$$
(21) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(z)\Big|_{\lambda=0} = a f(z) \prod_{k=1}^{m} \frac{f(z) - v_k}{f(z) - f(z_k)}
$$

$$
+ \frac{1}{2} a z f'(z) \left[\sum_{l=1}^{m} d_l \frac{z_l + z}{z_l - z} - d_0 \right]
$$

$$
+ \frac{1}{2} \bar{a} z f'(z) \left[\sum_{l=1}^{m} \bar{d}_l \frac{1 + \bar{z}_l z}{1 - \bar{z}_l z} + \bar{d}_0 \right]
$$

其中，

$$
(22) \qquad d_0 = \prod_{k=1}^{m} \frac{v_k}{f(z_k)},
$$

$$
d_l = \frac{f(z_l)(f(z_l) - v_l)}{z_l^2 f'(z_l)^2} \prod_{k \neq l} \frac{f(z_l) - v_k}{f(z_l) - f(z_k)}
$$

$$
(1 \leqslant l \leqslant m).
$$

例 7.6 我们来研究此类函数中 $f'(0)$ 的最大值问题。由(21)式，将其幂级数展开式的始项写出为

$$
\frac{\partial}{\partial \lambda} f_\lambda(z)\Big|_{\lambda=0} = f'(0) \mathrm{Re}\left[a \sum_{l=0}^{m} d_l \right] z + \cdots,
$$

因 a 是任意的，故极值函数 $f(z)$ 满足 $d_0 + \cdots + d_m = 0$。若以 $z \in D$ 代替 z_1 并使 $z_2, \cdots, z_m$ 固定，则由(22)式我们便得到如下形式的微分方程：

$$
(23) \qquad \left(\frac{z f'(z)}{f(z)} \right)^2 \frac{b_{m-1} f(z)^{m-1} + \cdots + b_0}{(f(z) - v_1) \cdots (f(z) - v_m)} = 1,
$$

比较系数知 $b_0 = (-1)^m v_1 \cdots v_m$，而 $b_1, \cdots, b_{m-1}$ 则依赖于极值函数的未知系数 $a_1, \cdots, a_m$。

微分方程(23)是由格软茨斯 (Grötzsch 1930) 和拉甫伦捷夫 (Lavrent'ev 1934) 建立的。库兹明娜 (Kuzmina 1965, 1968) 对 $m = 4$ 的情形给出了明确的解答。对于有关的"掩蔽定理"可参看

诸如 Jenkins 1953, 1961, 1969, Reich and Schiffer 1964, Netanyahu 1970；也可参看 4.4 节。

3. 具有实系数的单叶函数. 作为戈鲁辛变分的另外一个例子，我们考虑只具有实系数的函数 $f \in S$ 组成的类. 等价的假设是 $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$，即 $f(D)$ 关于实轴对称.

我们来构造变分. 设 $\zeta \in D$, $|a| = 1$. 由引理 7.3，对于适当的 $r < 1$ 和 $\lambda_0 > 0$，函数

$$(24)\qquad g_\lambda(z) = f(z) + \lambda a \frac{f(z)^2}{f(z) - f(\zeta)} + \lambda \bar{a} \frac{f(z)^2}{f(z) - f(\bar{\zeta})}$$

$$(0 \leqslant \lambda < \lambda_0)$$

在 $R = \{r < |z| < 1\}$ 内单叶. 因此定理 7.3 表明，取 $b = \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2$ 时函数

$$(25)\quad h_\lambda(z) = g_\lambda(z) + \lambda z f'(z) \left[-\left(\frac{ab\zeta}{z - \zeta} + \frac{\overline{ab\zeta}}{z - \bar{\zeta}} \right) + \left(\frac{\overline{ab\zeta} z}{1 - \bar{\zeta} z} + \frac{ab\zeta z}{1 - \zeta z} \right) \right] + o(\lambda)$$

在 D 内单叶. 由(24)式，显然 $h_\lambda(z)$ 只具有实系数. 因此 $\frac{h_\lambda(z)}{h'_\lambda(0)}$ 是 $f(z)$ 在该函数类中的一个变分.

设 Φ 是此类函数的一个有限度泛函. 利用我们在定理 7.4 证明中采用过的同样论证过程，可推知每个极值函数满足微分方程

$$(26)\qquad \left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2 \left(\Lambda \left[f; \frac{f(z)^2}{f(z) - f(\zeta)} \right] + \bar{\Lambda} \left[f; \frac{f(z)^2}{f(z) - f(\bar{\zeta})} \right] \right) = \bar{q}(\zeta).$$

关于它的应用可参看 Černikov 1963.

变分方法对于有界单叶函数的应用可以在诸如 Charzyński 1953, Singh 1957, Red'kov 1960, Schiffer and Tammi 1969, DeTemple 1970, 1971 等论文中找到.

问　　题

1. 从微分方程(5)，试分别就

(a) 不考虑方程右端的显式，

(b) 不考虑方程左端的显式，

推证出对于 $g\in\Sigma$ 有 $|b_1|\leqslant 1$。

2. 试证明对于 $|z|=r>1$ 有

$$\left\{\frac{g(z)}{z};g\in\Sigma_0\right\}=\left\{w;\left|w+1-\frac{1}{r^2}-2\lambda\left(\frac{1}{r}\right)\right|\right.$$

$$\left.\leqslant 2\left(1-\lambda\left(\frac{1}{r}\right)\right)\right\},$$

其中 $\lambda(k)=E(k)/K(k)$ 是完全椭圆积分的商。再利用寇勃变换证明 $\lambda(\rho^{-1})-\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\rho^{-2}=0$ 的解 $\rho\approx 1.78$ 是 Σ 类的凸性半径，即对一切 $g\in\Sigma$，$r\geqslant\rho$，使 $\{g(z);|z|=r\}$ 皆为凸曲线的最小数(Grötzsch 1931，Gulusin 1943，参看他的书 129 页)。

3. 设 $w_1,\cdots,w_m\in\mathbb{C}$，$m\geqslant 2$。考虑对于 $k=1,\cdots,m$，有 $w_k\in\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$ 的 Δ 内单叶函数 $g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 所组成的类中 $|b|$ 的最小值问题。试证明其每个极值函数满足一个如下形式的微分方程：

$$z^2g'(z)^2\frac{g(z)^{m-1}+\cdots+c_1g(z)+c_0}{(g(z)-w_1)\cdots(g(z)-w_m)}=1.$$

并证明 $\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$ 是至多 $2m-3$ 条解析弧的并，且不分割平面。

4. 试证明 S 类中奇函数所成的子类的谢菲尔微分方程具有如下形式：

$$\left(\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)^2\Lambda\left[f;\frac{f(z)^2}{f(\zeta)^2-f(z)^2}\right]=q(\zeta)$$

其中 $q(\zeta)$ 是有理偶函数且满足 $q(e^{it})\geqslant 0$。

5. 考虑满足 $f(0)=0$，$|f(z)|<1\ (z\in D)$ 的 D 内单叶函数 $w=f(z)$ 所成的类。试证对某个 ρ 有

$$\left|w+\frac{\lambda aw}{w_0-w}+\frac{\lambda\bar{a}w^2}{1-\bar{w}_0w}\right|\leqslant 1+O(\lambda^2)$$

$$(\lambda\to 0,\rho\leqslant|w|\leqslant 1).$$

并证明对一个(适当定义的)有限型泛函，它的极值函数满足如下形式的微分方程：

$$\frac{\zeta^2 f'(\zeta)^2}{f(\zeta)^2}\left(A\left[f;\frac{f(z)}{f(\zeta)-f(z)}\right]+\bar{A}\left[f;\frac{f(z)^2}{1-\overline{f(\zeta)}f(z)}\right]\right)=q(\zeta),$$

其中 $q(\zeta)$ 是有理函数且 $q(e^{it})\geqslant 0$。

6.试证明类 S 中的星形函数类的谢菲尔微分方程具有如下形式:

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\left(A\left[f;\frac{zf(z)}{z-\zeta}\right]+\bar{A}\left[f;\frac{\bar{\zeta}zf(z)}{1-\bar{\zeta}z}\right]\right)=\bar{q}(\zeta),$$

其中 $\bar{q}(\zeta)$ 是有理函数且 $\bar{q}(e^{it})$ 为实数. 并证明若 $\bar{q}(\zeta)\neq 0$，则极值区域是除去有限条径向割线的平面 (Hummel 1958)。

第八章 二次微分

8.1 引言

这一章我们先研究二次微分轨线的构造，然后证明珍肯斯的一般系数定理 (J. A. Jenkins 1954, 1960c)；珍肯斯在他的书中，只勾划了一个证明的轮廓。我们这里的叙述，部分地是以潘夫鲁格尔的讲稿为基础 (A. Pfluger 1967, 1971b)。

二次微分的思想可追溯到格朗茨斯与泰希谬勒尔(Teichmüller 1938, 1939)，我们首先通过一个简单的例子来说明这个方法。

考虑区域 $G\subset\hat{\mathbb{C}}$ 和矩形 $T=\{x+iy: |x|\leqslant a, |y|\leqslant b\}$ 使得 $T\setminus G$ 系由 T 内部的有限多条水平线段组成。设 $f(z)$ 在 G 内解析单叶。若记 $\Delta(z)=f(z)-z$，则

$$2\mathrm{Re}\Delta'(z)\leqslant 2(|f'(z)|-1)\leqslant |f'(z)|^2-1.$$

故得

$$2\mathrm{Re}\iint_T \Delta'(z)dxdy\leqslant \mathrm{area}f(T)-\mathrm{area}T,$$

因而

$$(1)\qquad \mathrm{area}f(T)-\mathrm{area}T\geqslant 2\int_{\partial T}\mathrm{Re}\Delta(z)dy.$$

这一不等式表明了共形映照有一个这样的性质：在一个方向上的偏差只有当在与其垂直的方向上有偏差时才可能存在。

另一方面，面积可用线积分表示。由格林公式得到

$$\mathrm{area}f(T)-\mathrm{area}T\leqslant\frac{1}{2i}\int_{f(\partial T)}\bar{w}dw-\frac{1}{2i}\int_{\partial T}\bar{z}dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{\partial T}(\overline{f(z)}f'(z)-\bar{z})dz=\frac{1}{2i}\int_{\partial T}(\Delta'\bar{\Delta}+\bar{\Delta}+\bar{z}\Delta')dz$$

因为 $d(\bar{z}\Delta(z))=\Delta d\bar{z}+\bar{z}\Delta'dz$，故

(2) $\quad \operatorname{area} f(T) - \operatorname{area} T \leqslant \frac{1}{2i}\int_{\partial T} \Delta' \bar{\Delta} dz + \operatorname{Im}\left[\int_{\partial T} \Delta dz\right]$

此式与(1)式结合得到

(3) $\quad \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \Delta(z) dz\right] \leqslant \frac{1}{4\pi i}\int_{\partial T} \overline{\Delta(z)}\Delta'(z) dz.$

假定域G包含∞，并且$\hat{\mathbf{C}}\backslash G$由有限条水平线段组成。若

$$f(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$$

在G内单叶，则对$T_n = \{x + iy; |x| \leqslant n, |y| \leqslant n\}$，当$n$充分大时有

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T_n} (f(z) - z) dz.$$

故由(3)式有

(4) $\quad \operatorname{Re} b_1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4\pi i}\int_{\partial T_n} (\overline{f(z)} - \bar{z})(f'(z) - 1) dz = 0.$

这就是一般系数定理在这一特殊情形下的不等式。

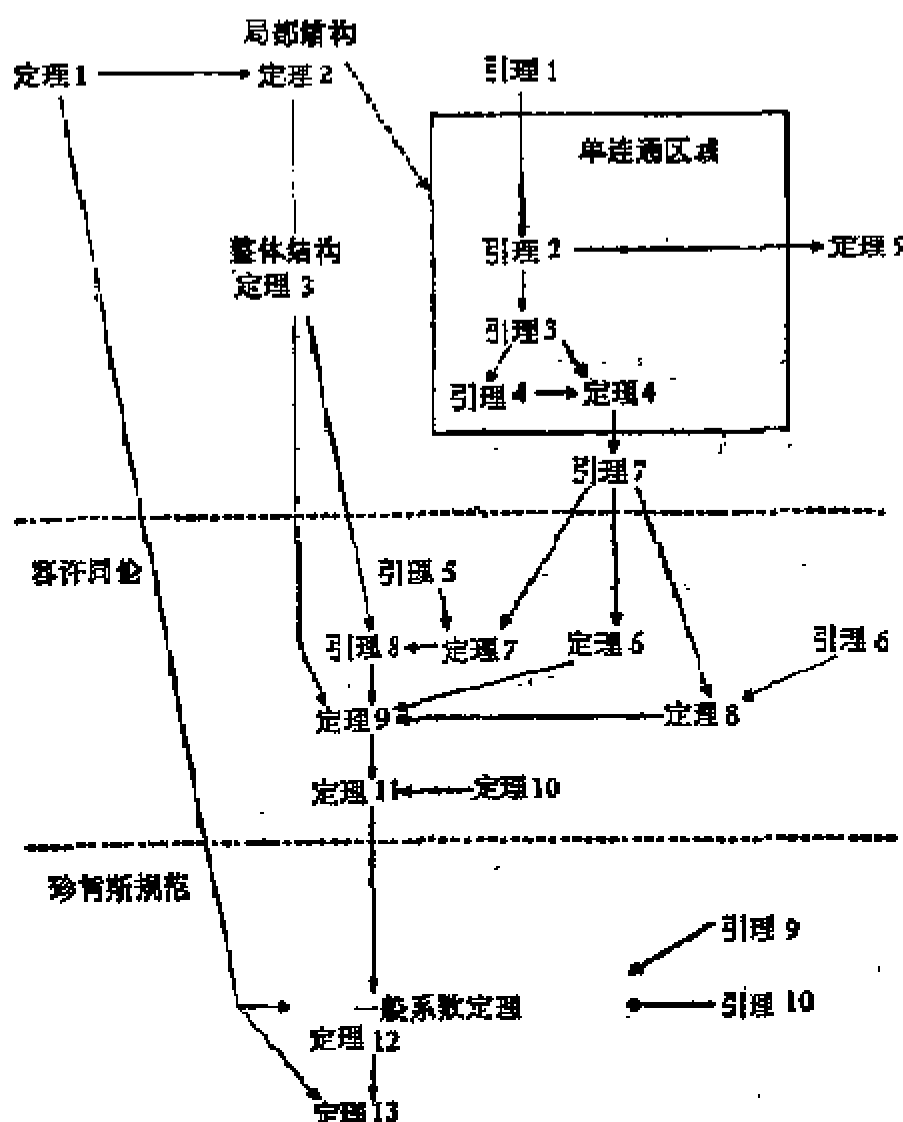
在一般情形下，所考虑的区域要复杂得多。它们由位于一个二次微分的轨线上的一些裂纹界成。单叶函数的极值问题很自然地要引出二次微分，正如谢非尔微分方程所表明的那样(见7.3节)。

证明较长的主要原因是定理的一般性。如果只对一种具体的特殊情况感兴趣，证明常可简化。格拉贝定-谢菲尔不等式的冗长证明(见4.3节)同一般系数定理的证明有许多共同的特点；在关键的一步也用到了二次微分。

下页的图表明了本章中直到一般系数定理为止的各个结果之间的关系。图中位于中心的定理8.9是(1)式的推广；定理8.10，8.11，8.12分别是估计式(2)，(3)，(4)式的推广。8.4节中的同伦条件对定理8.9是需要的。就定理8.10而论，这些条件仅仅用来使该定理的结果可以同定理8.9的结果相类比。

前面各章所叙述的方法多半限于单连通区域，而二次微分却主要应用于多连通区域，也应用于拟共形映照。

本章的大部分讨论可推广到任意的闭黎曼面，如珍肯斯的书



中所作．当然，由于只存在局部单值化，使所用记号变得更加复杂了．本章直到 8.6 节的那些表达式，在局部单值化变换下均保持不变，如我们在引理 8.9，8.10 及在 (8.6.20)—(8.6.23) 式中将指明的那样；只有引理 8.1 用到了 $\hat{\mathbb{C}}$ 的整体拓扑性质．作为证明一般系数定理的准备，在引理 8.7 的证明中我们使用了万有复盖曲面．

问　　题

1．设 G，T 和 $f(z)$ 如正文例子中所给定．求证：若每条水平线段 $[-a+iy, a+iy]$ ($|y|\leq b$) 被映照成长度 $\geq 2\alpha$ 的曲线，则

$\frac{\text{area} f(T)}{\text{area} T}\geq\frac{\alpha^2}{a^2}$（任格尔 (Rengel) 不等式）且仅当 $f(z)=c_1z+c_0$，$|c_1|$

$-\frac{\alpha}{a}$时等号成立.

2. 设G是有限连通区域，$\infty\in G$. 若函数 $f(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$在$G$内单叶，$\hat{\mathbf{C}}\backslash G$由水平线段组成。求证：

$$\mathrm{Re}\, b_1\geqslant\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{area}(\hat{\mathbf{C}}\backslash f(G)).$$

8.2 二次微分的基本性质

1. 设G是$\hat{\mathbf{C}}$的一个开子集，$Q(z)$在G内亚纯. 形式表达式

(1) $$Q(z)dz^2$$

称为G内的一个二次微分. 若单叶函数 $w=\varphi(z)$ 把G映成$G^*\subset\hat{\mathbf{C}}$，则由定义知形式恒等式

(2) $$Q(z)dz^2=Q^*(w)dw^2$$

的含义是

(3) $Q(z)=Q^*(\varphi(z))\varphi'(z)^2$; $Q^*(w)=Q(\varphi^{-1}(w))\varphi^{-1\prime}(w)^2$.

二次微分由亚纯函数$Q(z)$所确定. 但我们并非对这个函数本身感兴趣，而只是对它在共形变换下的不变性感兴趣，即对所有函数$Q^*(w)$共有的性质感兴趣. 因此，我们常常用共形映照把二次微分化成尽可能简单的形式.

先设z_0是G的一个有限点. 则$Q(z)$具有展开式

(4) $$Q(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu(z-z_0)^\nu,\quad a_n\neq 0.$$

若$n=0$，则称z_0为一常点；若$n>0$，则称z_0为n阶零点；若$n<0$，则称z_0为$|n|$阶极点.

设$\infty\in G$，且对∞的某个邻域有

(5) $$Q(z)=\sum_{\mu=m}^{\infty}a_\mu z^{-\mu},\quad a_m\neq 0.$$

若$m=4$，则称∞为常点；若$m-4>0$，则称∞为$m-4$阶零点；若$m-4<0$则称∞为$|m-4|$阶极点. 我们选取的这个定义具有共形不变性：如果以$z=w^{-1}$把∞映成0，则

$$Q(z)dz^2 = w^{-4}Q(w^{-1})dw^2,$$

于是由 (5) 式有

$$Q^*(w) = w^{-4}Q(w^{-1}) = \sum_{\mu=m}^{\infty} a_\mu w^{\mu-4} = \sum_{\nu=m-4}^{\infty} a_{\nu+4}w^\nu.$$

容易验证零、极点概念及其阶数总是共形不变的.

零点和极点统称为二次微分的临界点. 零点和单极点称为有限临界点；将会看到单极点与零点有着许多共同之处. 引入记号

$\Pi_0 = \{$有限临界点$\} = \{$零点$\} \cup \{$单极点$\}$,

$\Pi_1 = \{$所有极点$\}$,

$\Pi_2 = \{$阶数 ≥ 2 的极点$\}$,

$\Pi = \{$临界点$\} = \Pi_0 \cup \Pi_2$.

引理 8.1 若 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 内的一个二次微分，则按重数计算时有

(极点个数)−(零点个数)$=4$.

证 因函数 $Q(z)$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 内亚纯故必为有理函数. 若 $Q(z)$ 在 ∞ 具有 (5) 式的形式，则

(有限极点个数)−(有限零点个数)$=m$,

从二次微分在 ∞ 处的零极点定义即得到所需结果.

2. 设 $Q(z)dz^2$ 是 G 内的一个二次微分. 若 C 是 G 内一条逐段光滑的曲线，则定义其 Q 长度为

$$l_Q(C) = \int_C \sqrt{|Q(z)|}\,|dz|; \tag{6}$$

若 $E \subset G$ 为勒贝格可测，则定义其 Q 面积为

$$A_Q(E) = \iint_E |Q(z)|\,d\Omega \quad (d\Omega = dxdy). \tag{7}$$

这些定义是共形不变的，即由变换公式 (3) 有

$$l_Q(C) = l_{Q^*}(\varphi(C)), \quad A_Q(E) = A_{Q^*}(\varphi(E)). \tag{8}$$

若 G 是区域，那末我们引入 Q 度量

(9) $$d_Q(z_1,z_2)=\inf_C l_Q(C),$$

其中下确界取在所有从 z_1 到 z_2 的曲线

(10) $$C\subset G\setminus \Pi_1$$

上，注意该定义依赖于区域 G；若限制二次微分于一子域，Q 距离可能增加。即使我们考虑的只是子域的共形映照，也须留意。

若 $Q(z)$ 在临界点 z_0 具有形式(4)，则

(11) $$\sqrt{|Q(z)|}=\sqrt{|a_n|}\,|z-z_0|^{\frac{n}{2}}[1+O(|z-z_0|)].$$

从(6)式推知有限临界点到常点间具有有限距离，因为 $\frac{n}{2}\geqslant-\frac{1}{2}>-1$。另一方面，$\Pi_2$ 中的点到常点间具有无限距离，因为 $\frac{n}{2}\leqslant-1$。进而，从(11)式推知每个常点和每个有限临界点具有一个面积有限的邻域，但对更高阶的极点这一点不成立。

3. 现在我们在点 $z_0\in G$ 的邻域内把 $Q(z)dz^2$ 化成法式；可假定 $z_0=0$。我们有

(12) $$Q(z)=\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu z^\nu\quad a_n\neq 0,$$

且在 0 点的某邻域内 $z^{-n}Q(z)$ 解析且不等于零。我们分三种情况讨论之：

(i) 设 $n\neq-2m$，$m=1,2,\cdots$，函数 $Q(z)$ 可表为

(13) $$Q(z)=z^n g(z)^2,\quad g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu z^\nu\ (b_0^2=a_n\neq 0).$$

定义

(14) $$h(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(n+2)b_\nu}{n+2\nu+2}z^\nu(b_0\neq 0).$$

再选定

(15) $$w=\varphi(z)=zh(z)^{\frac{2}{n+2}}$$

的任一分支。由于 $h(0)=b_0\neq 0$，该函数在 0 的某邻域内单叶。微分恒等式 $\varphi(z)^{n+2}=z^{n+2}h(z)^2$，便从(14)式得到

$$(n+2)\varphi(z)^{n+1}\varphi'(z)=(n+2)z^{n+1}g(z)h(z),$$

因而由(15)和(13)式有

$$\varphi(z)^n\varphi'(z)^2=Q(z).$$

故(3)式表明在 $z=0$ 的邻近

(16) $$Q(z)dz^2=w^n dw^2.$$

(ii) 设 $n=-2m, m>1$. 函数 $Q(z)$ 可表为

(17) $$Q(z)=(b_{-1}z^{-1}+h'(z))^2,$$

其中

$$h(z)=\sum_{\mu=-m,\ \mu\neq-1}^{\infty}\frac{b_\mu}{\mu+1}z^{\mu+1},\quad b_{-m}\neq 0.$$

我们希望找到一个如下形式的共形映照

(18) $$w=\varphi(z)=z\exp\chi(z)$$

使得对足够小的 w 有

(19) $$Q^*(w)=\left(\frac{1}{w^m}+\frac{c}{w}\right)^2.$$

由(3)式,这归结为微分方程

$$\begin{aligned}b_{-1}z^{-1}+h'(z)&=(w^{-m}+cw^{-1})\varphi'(z)\\&=(1-m)^{-1}\frac{d}{dz}[z^{1-m}e^{(1-m)\chi(z)}]+cz^{-1}\\&\quad+c\chi'(z)\end{aligned}$$

而这一方程只有在 $c=b_{-1}$ 且

(20) $$z^{m-1}h(z)-cz^{m-1}\chi(z)-\frac{1}{1-m}e^{(1-m)\chi(z)}=0$$

的条件下才成立. 函数

$$F(z,u)=z^{m-1}h(z)-cz^{m-1}u-\frac{1}{1-m}e^{(1-m)u}$$

对 $u\in C$ 和充分小的 z 解析. 若 u_0 是由等式

$$\frac{1}{1-m}e^{(1-m)u_0}=\lim_{z\to0}z^{m-1}h(z)=\frac{b_{-m}}{1-m}$$

---

1) 式中 z^{n+1} 原文误为 z^n.——译者注

确定的，则 $F(0,u_0)=0$，并且 $\frac{\partial F}{\partial u}(0,u_0)=-b_{-m}\neq 0$. 于是由隐函数定理，存在唯一的解析函数 $u=\chi(z)$，$\chi(0)=u_0$ 使 $F(z,\chi(z))=0$，即满足 (20) 式从而满足 (19) 式.

(iii) 设 $n=-2$. 将 $Q(z)$ 写成 (17) 式的形式而有

$$h(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{b_\mu}{\mu+1}z^{\mu+1}.$$

仿照 (ii) 中的论证，我们求得共形映照

$$w=\varphi(z)=z\exp(c^{-1}h(z))\quad (c^2=a_{-2})$$

而导出 $Q^*(w)=a_{-2}w^{-2}$.

因此我们证明了：

定理 8.1 设 $Q(z)dz^2$ 是 G 中的一个二次微分，$z_0\in G$. 则存在 z_0 某个邻域的一个共形映照 $w=\varphi(z)$ 使得

$$Q(z)dz^2=\begin{cases} dw^2 & z_0 \text{ 是常点} \\ w^n dw^2 & z_0 \text{ 是 } n \text{ 阶零点} \\ w^{-n}dw^2 & z_0 \text{ 是 } n \text{ 阶极点，} n \text{ 是奇数} \\ c^2w^{-2}dw^2 & z_0 \text{ 是 2 阶极点} \\ (w^{-\frac{n}{2}}+cw^{-1})^2dw^2 & z_0 \text{ 是 } n \text{ 阶极点，} \\ & n \text{ 是偶数，} n\geqslant 4. \end{cases}$$

其中 c 是函数 $\sqrt{Q(z)}$ 在 z_0 点的留数；当然，只是 c^2 才与 $\sqrt{Q}$ 的分支选择无关.

4. 光滑曲线 Γ: $z(t)$, $\alpha<t<\beta$ 称为 G 内二次微分 $Q(z)dz^2$ 的一条轨线弧，如果 $\Gamma\subset G\backslash\Pi$，且

$$Q(z(t))\dot{z}(t)^2>0\quad(\alpha<t<\beta). \tag{21}$$

最大轨线弧称为轨线. 我们把 (21) 式简写为

$$Q(z)dz^2>0. \tag{22}$$

上述定义显然与 Γ 的参数表示无关. 如果共形映照 $w=\varphi(z)$ 把 G 映照成 G^*，则也把二次微分 $Q(z)dz^2$ 的轨线映照成由 (3) 式所定义的二次微分 $Q^*(w)dw^2$ 的轨线. 容易看出，两条不同的轨线

互不相交.

若 $\Gamma: z(t), \alpha < t < \beta$ 是一条轨线且 $a = \lim\limits_{t \to \alpha+0} z(t)$ 存在并位于G内，则 a 必定是一个临界点，因为否则 Γ 就不是最大的。这时我们说 Γ 以 a 为端点. 同样的结论对 $t \to \beta - 0$ 时的极限也成立.

$\hat{\mathrm{C}}$ 内二次微分的一条轨线 Γ，有以下三种可能情形:

(I) Γ 是闭若当曲线;

(II) Γ 是连接两个临界点的闭若当弧，或者是仅包含一个临界点的闭若当曲线;

(III) Γ 是一条开若当弧，且 $t \to \alpha$ 或 $t \to \beta$ 时的两个极限点集合中至少有一个是非退化连续统。

后面我们将会发现不可能有始于 Π_2 中的点而另一端振动的轨线. 如果是情形 (II) 并且 Γ 至少包含一个有限临界点，则称 Γ 是临界轨线. 因此连接两个非有限临界点的轨线不是"临界的"，从一个临界点出发而在另一端振动的轨线也不是临界轨线.

$-Q(z)dz^2$ 的轨线称为 $Q(z)dz^2$ 的正交轨线. 这些曲线确实与 $Q(z)dz^2$ 的轨线正交，因为按照定义，轨线仅由常点组成.

今研究在给定点 $z_0 \in G$ 邻近轨线的局部结构. 由于轨线的定性特征在共形映照下不变，我们只需要考虑定理 8.1 中给出的二次微分法式就够了(见图 8.1a—e).

(a) 设 z_0 是常点，则 dw^2 的轨线是水平线.

(b) 设 z_0 是 n 阶零点. 函数 $\zeta = w^{\frac{n+2}{2}}$ 把每个扇形

$$\left\{\frac{2(\nu - 1)\pi}{n + 2} < \arg w < \frac{2\nu\pi}{n + 2}\right\} \quad \nu = 1, 2, \cdots, n + 2,$$

一一地映照成上半平面或下半平面，且有 $w^n dw^2 = d\zeta^2$. 点 $w = 0$ 对应于 $\zeta = 0$. 故推知恰有 $n + 2$ 条轨线以 $w = 0$ 为端点且其余的轨线位于由这 $n + 2$ 条轨线所构成的扇形之中.

(c) 设 z_0 是单极点. 函数 $\zeta = w^{\frac{1}{2}}$ 把以正实轴作割线的平面映成上半平面，$w^{-1}dw^2 = d\zeta^2$，因此，恰有一条轨线以 z_0 为端点.

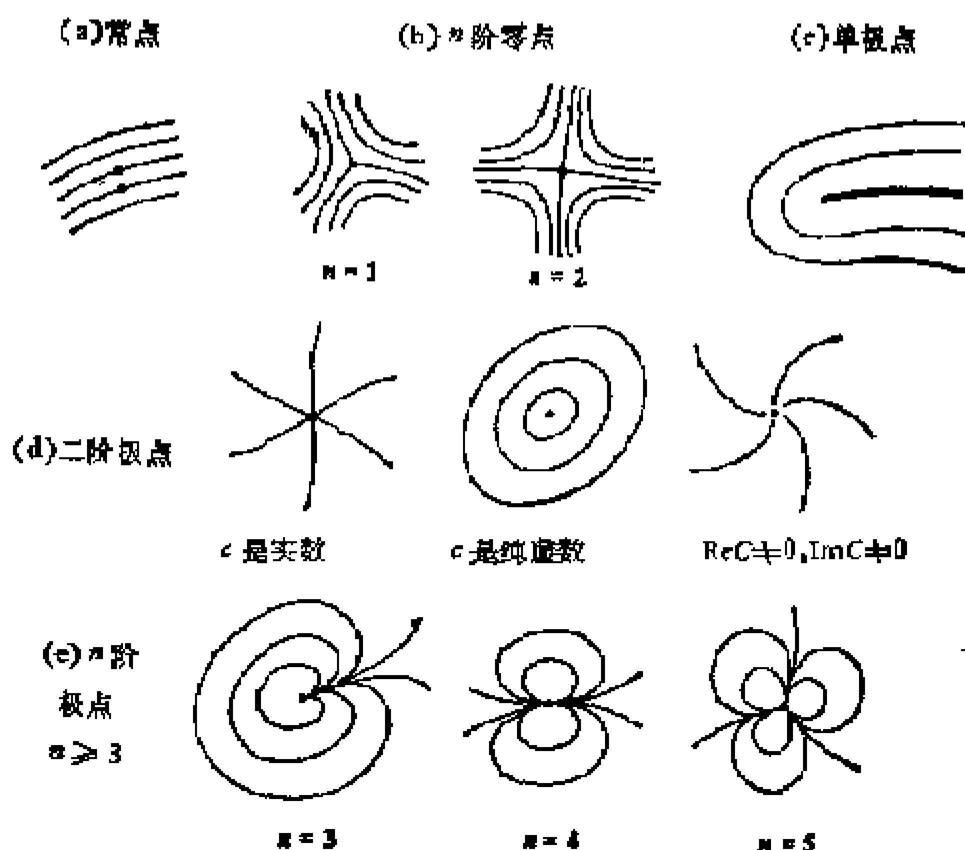


图 8.1

(d) 设 z_0 是二阶极点，则法式是 $c^2w^{-2}dw^2$。且轨线 $c^2w^{-2}dw^2 > 0$ 由下式给出：

$$w = \gamma \exp \frac{t}{c} \qquad (\gamma \neq 0).$$

因此当 c 为实数时是径向直线，当 c 为纯虚数时是同心圆，否则是对数螺线。

(e) 设 z_0 是阶数 $n \geq 3$ 的极点，n 是奇数，或者 n 为偶数而 $c = 0$，则法式为 $w^{-n}dw^2$。函数 $\zeta = w^{-\frac{n-2}{2}}$ 把每个扇形

$$\left\{\frac{2(\nu-1)\pi}{n-2} < \arg w < \frac{2\nu\pi}{n-2}\right\}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n-2$$

一一地映照成上半平面或下半平面，且有 $w^{-n}dw^2 = d\zeta^2$，点 $w = 0$ 对应 $\zeta = \infty$。因此在 $w = 0$ 邻近的轨线以 0 为端点，其可能的交角是 $\frac{2\nu\pi}{n-2}$ $(\nu = 1, \cdots, n-2)$。

(f) 设 z_0 是阶数为偶数 $2m \geq 4$ 的极点且 $c \neq 0$. 则法式为 $(w^{-m} + cw^{-1})^2 dw^2$. 经代换 $w \mapsto c^{-\frac{1}{m-1}} w$ 变为 $c^2(w^{-m}+w^{-1})^2 dw^2$;因为该二次微分在旋转 $w \mapsto e^{\frac{2\pi i}{m-1}} w$ 下不变. 故只需考虑扇形 $\left\{|\arg w| \leq \frac{\pi}{m-1}\right\}$ 即可. 函数 $\zeta = (m-1)\log w$ 把这一扇形一一地映照成带域 $\{|\mathrm{Im}\zeta| \leq \pi\}$ (见图 8.2),而 $\omega = \zeta - e^{-\zeta}$ 把这带域一一地映照成割去两条半直线 $\{\omega:\ \mathrm{Re}\omega \geq 1,\ \mathrm{Im}\omega = \pm\pi\}$ 的平面. 扇形在 $w=0$ 邻近的部分被映照成图 8.2 中带阴影的区域. 二次微分变成 $\left(\frac{c}{m-1}d\omega\right)^2$,并且轨线位于直线 $\omega = \bar{c}t + b(-\infty < t < +\infty)$ 上,$b \in \mathbf{C}$. 注意到若逆转这些变换然后把 $n-2$ 个扇形放在一起就得到与 (e) 中相同的定性图形.

于是我们得到下述性质: $(w^{-m} + cw^{-1})^2 dw^2$ 的与 0 点充分接近的每条轨线都以 0 为端点并在 0 点形成定角, 且任何两个这样的角之差是 $\frac{\pi}{m-1}$ 的倍数. 而 z_0 的邻域则恰好被分成 $n-2$ 个区域,使每条与这些区域相交的轨线以相差之角为 $\frac{\pi}{m-1}$ 的两个

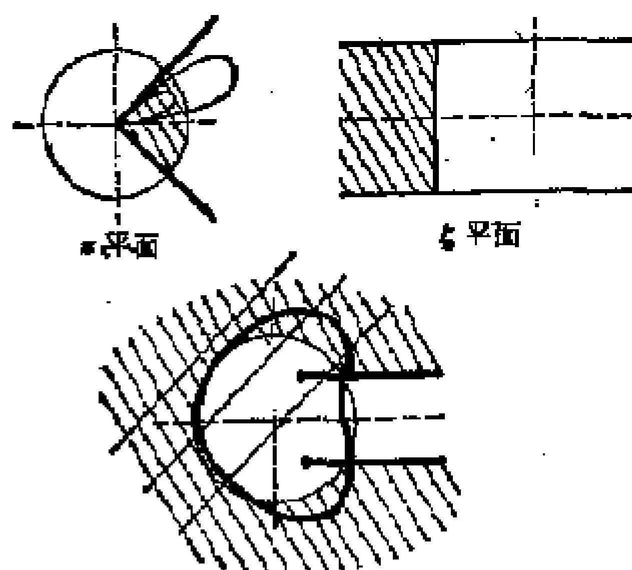


图 8.2

方向终于 0 点。

如果我们由 $z=\varphi^{-1}(\omega)$ 回到 $Q(z)dz^2$，上述结果仍成立。当然直线变成曲线，而角度之间的差仍相同。我们把上述主要结果归纳为：

定理 8.2 恰有 $Q(z)dz^2$ 的一条轨线通过每个常点，若 z_0 是 n 阶零点，则恰有 $n+2$ 条轨线以等角终于 z_0；若 z_0 是单极点，则恰有一条轨线终于 z_0；若 z_0 是阶数 $n\geqslant 2$ 的极点，则存在具有如下性质的 z_0 的任意小邻域 U：若轨线 Γ 与 U 相交，则 $\Gamma\cap U$ 是由连接 z_0 和 ∂U 的一条或两条解析弧组成，或者是在两个方向上终于 z_0 的一条解析若当弧。在二阶极点的情形，任意小邻域可以被完全由闭轨线组成的邻域所代替。

因为 $\hat{\mathbf{C}}$ 上一个二次微分只有有限多个临界点，又因从每个有限临界点出发的轨线只有有限多条，因而 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的一个二次微分只可能有有限多条临界轨线。

问　　题

1. 设 $Q_1(z)dz^2$ 和 $Q_2(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上具有同样的零极点(包括重数)的两个二次微分。求证：$Q_1(z)\equiv cQ_2(z)$，$c\in\hat{\mathbf{C}}$，$c\neq 0$.

2. 设 $Q_1(z)dz^2$ 和 $Q_2(z)dz^2$ 是 G 的在点 $z_0\in G$ 的邻域内具有相同轨线的两个二次微分。求证：$Q_1(z)\equiv cQ_2(z)$，$c>0$.

3. 设 $p(z)$ 是 k 次多项式. 求证 $p(z)^2dz^2$ 在 $z_0=\infty$ 的法式为 $w^{-(2k+4)}dw^2$.

4. 设 z_0 是一个二次微分的单极点. 求证终于 z_0 的轨线弧连同在 z_0 点的正交轨线弧一起构成一条解析若当弧.

5. 设 $Q(z)dz^2$ 是 G 内一个二次微分且设 $z_0\in G$. 假定在 z_0 的每个邻域内存在环绕 z_0 的闭轨线. 求证：z_0 是一个二阶极点. 进而证明充分接近 z_0 的所有轨线具有相同的 Q 长度.

6. 设 Φ 是 S 上的 n 度泛函(见 7.2 节和 7.3 节)。求证每个极值区域由某个二次微分的轨线上的一些裂纹界成.

8.3 轨线的整体结构

1. 设 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的一个二次微分. 我们已经知道，这个

二次微分只有有限个临界点和有限条临界轨线.

设 z_0 是 $Q(z)dz^2$ 的一个常点，则存在函数 $g(\zeta)$，在 $\zeta=0$ 的某邻域内单叶，使得 $g(0)=z_0$ 且

$$(1) \qquad Q(g(\zeta))g'(\zeta)^2 \equiv 1.$$

我们考虑 $g(\zeta)$ 沿所有从 $\zeta=0$ 出发的射线之最大局部单叶亚纯延拓. 所有这些射线的并是一个星形区域 H，$g(\zeta)$ 在 H 内亚纯且满足(1)式. 由(1)式推知 $z=g(\zeta)$ 把 H 内的每条水平线段映照成轨线弧.

由(1)式，函数 $g(\zeta)$ 给出从具有欧氏度量的区域 H 到具有 Q 度量的 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的一个局部等距映照. 因此，如果 ζ_0 是 H 的有限边界点，$[0,\zeta_0)\subset H$，则极限 $\lim\limits_{t\to 1-0} g(t\zeta_0)=g(\zeta_0)$ 存在. 这个点不可能属于 Π_2，因为 $g(\zeta_0)$ 和 z_0 具有有限 Q-距离. 由于 $g(\zeta)$ 不存在越过 ζ_0 的局部单叶亚纯延拓，故 $g(\zeta_0)$ 不可能是一个常点. 因此，$g(\zeta_0)\in\Pi_0$. 容易看出，在 ζ_0 的某个邻域内，除去在 $\{t\zeta_0: t\geqslant 1\}$ 上的那些点之外不存在别的边界点. 因而 H 是一个不含某个序列 (a_k) 的最大星形域，该序列若为无限序列则 $a_k\to\infty$.

可能有两种情况:

(i) H 不包含任何以 $\zeta=0$ 为内点的水平带域. 这时每个带域 $\{|\operatorname{Im}\zeta|<\delta\}(\delta>0)$ 都含有属于序列 (a_k) 的边界点. 通过这些点的水平线段被 $z=g(\zeta)$ 映照成从 Π_0 的某个点出发的轨线，该轨线包含 z_0 或与 z_0 任意接近. 显然如果通过 z_0 的轨线是封闭的并且不穿过 Π_0 的任何点，这种情况就不会出现.

(ii) H 包含一个以 0 为内点的水平带域. 设 $T=\{\alpha<\operatorname{Im}\zeta<\beta\}(-\infty\leqslant\alpha<0<\beta\leqslant+\infty)$ 是 H 内这种水平带域之最大者. 假定 $g(\zeta)$ 在 H 内非单叶，即 $g(\zeta_1)=g(\zeta_2)$ $(\zeta_1,\zeta_2\in H,\zeta_1\neq\zeta_2)$. 由(1)式，函数 $g(\zeta)$ 和 $g(\zeta+\zeta_2-\zeta_1)$ 满足微分方程 $\sqrt{Q(g(\zeta))}\,g'(\zeta)=\pm 1$ 并且在 $\zeta=\zeta_1$ 具有相同的初值. 故推知

$$g(\zeta)=g(\zeta+\zeta_2-\zeta_1) \quad 或 \quad g(\zeta)=g(-\zeta+\zeta_1+\zeta_2).$$

但后一种情形不会发生，因为它意味着 $g'(\zeta)=-g'(-\zeta+\zeta_1+$

ζ_2)，因而 $g'\left(\frac{\zeta_1+\zeta_2}{2}\right)=0$. 这样我们就证明了如果 $g(\zeta_1)=g(\zeta_2)$ 则 $\zeta_1-\zeta_2$ 是 $g(\zeta)$ 的周期.

回到一般的情形 (ii). 它又可分为四种情形：

(a) 设 $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$, 则 $T=H=\mathbf{C}$. 若 $g(\zeta)$ 在 $\mathbf{C}$ 中单叶则必为分式线性变换. 故由 (1) 式，$Q(z)dz^2$ 可以从 $d\zeta^2$ 经一分式线性变换得到.

若函数 $g(\zeta)$ 在 $T=\mathbf{C}$ 内非单叶，则如刚才看到的，它是一个周期函数. 它不可能是双周期的，因为在双周期的情况下，函数在它的周期平行四边形中就已经取得了每一个值，故每个点是常点，而由引理 8.1 这是不可能的. 顺便指出，若所考虑的不是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上而是一个环面上的二次微分时，这种情况到是可能发生的.

因此，$g(\zeta)$ 是单周期函数，比如说具有基本周期 $b\neq 0$. 在周期带域中函数是单叶的，因为若 $g(\zeta_1)=g(\zeta_2)$ ($\zeta_1\neq\zeta_2$)，则 $\zeta_1-\zeta_2$ 就是一个线性无关的周期. 这就推出函数 $g_1(w)=g\left(\frac{b}{2\pi i}\log w\right)$ 在 $0<|w|<\infty$ 内单叶因而是一个分式线性变换. 因此 Qdz^2 可以由 $\text{const}\cdot w^2dw^2$ 经一分式线性变换得到.

(b) 设 $\alpha>-\infty$, $\beta=+\infty$, 则 T 是使得在其内 $g(\zeta)$ 亚纯且局部单叶的最大半平面.

首先设 $g(\zeta)$ 在 T 内单叶. 由 (1) 式，反函数为

$$\zeta=\varphi(z)=\int_{z_0}^{z}\sqrt{Q(z')}\,dz'. \tag{2}$$

设 V 是使 $\bar{V}\cap\Pi_2=\varnothing$ 的任一区域，V_1 是所有与 V 的 Q 距离小于 1 的点的集合. 由于 Π_2 中的点到任何常点的 Q 距离无限大而知 $\bar{V}_1\cap\Pi_2=\varnothing$.

假定存在点 $\zeta_\nu\in T$ 使 $g(\zeta_\nu)\in V$ 且 $\zeta_\nu\to\infty$ ($\nu\to\infty$). 可假定当 $\mu\neq\nu$ 时 $|\zeta_\nu-\zeta_\mu|\geq 2$. 则诸集合

$$\{g(\zeta):|\zeta-\zeta_\nu|<1\}\subset V_1,\quad \nu=1,2,\cdots$$

是不交的. 因为每一集的 Q 面积不小于 $\frac{\pi}{2}$，故推知 V_1 的 Q 面积无

穷大。而这是不正确的，因为 $\bar{V}_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$。于是我们断言：当 $\zeta \to \infty$，$\zeta \in T$ 时，$g(\zeta)$ 的所有极限点都位于 $\hat{\mathbb{C}} \backslash V$ 内，因而在 Π_2 内，因为 V 是满足 $\bar{V} \cap \Pi_2 = \varnothing$ 的任意区域。

由于极限点的集合是连通的，故极限

$$(3) \qquad \lim_{\zeta\to\infty,\ \zeta\in T} g(\zeta)$$

存在并且属于 Π_2，它必定是阶数不小于 3 的极点，因为二阶极点邻域内的轨线结构同这里所遇到的不同(见 8.2 节情况 (d))。由于水平线被映照成轨线弧，而 T 又是最大的，故可看出象域 $g(T)$ 是由临界轨线，Π_0 中的点以及 Π_2 中恰好一个点所界成。

设 $g(\zeta)$ 在 T 中非单叶。如已所知，$g(\zeta)$ 是周期函数，并且基本周期 b 必为实数，因为否则 $g(\zeta)$ 将在 C 内亚纯且局部单叶。可假定 b 大于 0。则由于 $g(\zeta_1) = g(\zeta_2)$ 推出 $\zeta_1 - \zeta_2$ 是周期，可进而知 $g(\zeta)$ 在 $\{0 \leqslant \operatorname{Re}\zeta < b\} \cap T$ 内单叶。故 $g_1(w) = g\left(\frac{b}{2\pi i} \log w\right)$ 在 $R = \{0 < |w| < \exp(-2\pi\alpha/b)\}$ 内单叶，因此具有一个到 $w = 0$ 的亚纯延拓。其反函数为

$$(4) \qquad w = \phi(z) = \exp\left(\frac{2\pi i}{b}\int_{z_0}^{z} \sqrt{Q(z')}\, dz'\right)$$

且有

$$(5) \qquad Q(z)dz^2 = d\zeta^2 = -\frac{b^2}{4\pi^2}\frac{dw^2}{w^2}.$$

因 $z = g_1(w)$ 是 $w = 0$ 邻域到 $g_1(0)$ 邻域的共形映照，故 $g_1(0)$ 是一个二阶极点。象域 $g(T) = g_1(R)$ 是一个二连通区域，且由临界轨线，有限临界点以及该二阶极点所界成。

(c) $\alpha = -\infty$，$\beta = +\infty$ 的情形与情形 (b) 对称。

(d) 设 $\alpha > -\infty$，$\beta < +\infty$，则 T 是真正的带域。若 $g(\zeta)$ 单叶，则如 (b) 中所证，两个极限

$$\lim_{\operatorname{Re}\zeta\to\pm\infty,\ \zeta\in T} g(\zeta)$$

均存在且属于 Π_2。$\partial g(T) \backslash \Pi_2$ 的两个分集由临界轨线和 Π_0 中的点

组成.

若 $g(\zeta)$ 非单叶，作与(b)中同样的论证表明 $g_1(w)$ 在一个环内单叶. 故 $g(T)$ 为二连通区域，且 $\partial g(T)$ 的两个分集完全由临界轨线和 Π_0 中的点组成.

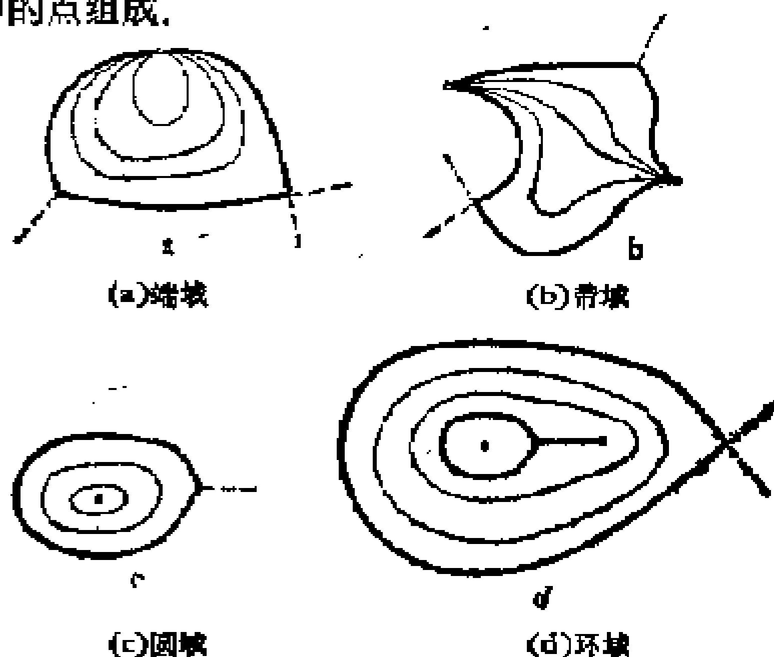


图 8.3 a—d

2. 为了更简洁地陈述上述结论，我们再引进一些定义（见图 8.3；Π_2 中的点用小圆圈表示）.

设区域 $G\subset\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi$ 由临界轨线和临界点界成.

先设 G 是单连通域. 若函数

$$\varphi(z)=\int\sqrt{Q(z)}\,dz \tag{6}$$

把 G 共形映照到一个水平半平面，则称 G 为(关于 $Q(z)dz^2$) 的一个**端域**；若 $\varphi(z)$ 把 G 共形映照到一个水平带域，则称 G 为**带域**.

再设 G 是二连通区域. 对某个 $b>0$，若函数

$$\psi(z)=\exp\left(\frac{2\pi i}{b}\int\sqrt{Q(z)}\,dz\right) \tag{7}$$

把 G 共形映照到一个穿孔圆盘，则称 G 为**圆域**；若 $\psi(z)$ 把 G 共形映照到一个以 o 为心的圆环，则称 G 为**环域**.

从(6)和(7)式推知，在每种情况下，区域被一族轨线恰好覆

差一次．在端域和带域的情形这些轨线是开若当弧，而在圆域和环域的情形则是闭若当曲线．

如果从有限临界点出发的轨线在 G 内稠密，则称 G 为**稠密域**．

现在可以来叙述**整体结构定理**（Jenkins and Spencer 1951，Jenkins 1954）．

定理 8.3 设 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{C}$ 上的一个二次微分，它不能经分式线性变换化成 $d\zeta^2$ 或 $\mathrm{const}\cdot\zeta^{-2}d\zeta^2$ 的形式．则所有临界轨线及所有临界点的并集的余集由有限多个端域，带域，圆域，环域或稠密域所组成．

每个二阶极点或是圆域的中心，或是具有被带域所覆盖的邻域．每个阶数 $n\geqslant 3$ 的极点具有被 $n-2$ 个端域可能还有带域所覆盖的邻域．

端域的边界含有一个阶数 $\geqslant 3$ 的极点，带域的边界含有两个阶数 $\geqslant 2$ 的极点（可能重合）．圆域边界正好含有一个二阶极点；环域和稠密域的边界不含 Π_2 中的点．稠密域不含封闭轨线．

证 设 H 是所有临界轨线和所有临界点的并集的余集的一个分集．由于只有有限多条临界轨线，故只存在有限多个这样的分集．若 H 是稠密域就没有什么要证明的．否则必存在一点 $z_0\in H$，对该点情况 (i) 不适用．

由定理的假设，情形 (ii) 中的 (a) 可以排除．(b) 和 (c) 的情形导致一个端域 $g(T)$ 或圆域 $g_1(T)$，(d) 的情形导致带域 $g(T)$ 或环域 $g_1(T)$．由于这些区域由临界轨线和临界点界成，故分集 H 分别恒等于 $g(T)$ 或 $g_1(T)$．

今设 $a\in\Pi_2$．由定理 8.2，与 a 的某个邻域 U 相交的每条轨线或者是封闭的，或者以 a 为端点而从另一方向离开 U．这推知 U 不与任何稠密域相交．如上面已看到的，点 $a\in\Pi_2$ 不可能位于环域的边界上；一个二阶极点不可能位于端域的边界上．若 a 是阶数 $n\geqslant 3$ 的极点，它不能位于圆域的边界上．a 的一个邻域恰好被 $n-2$ 个端域(可能有一些带域)所覆盖的断言则可从 8.2 节情形 (e) 和 (f) 的讨论推出．定理 8.3 最后一段的断言在本节开头

的讨论中已得到证明。

3. 现在来考虑单连通区域G中的二次微分$Q(z)dz^2$。假设L是G中的一条闭若当曲线，它不包含$Q(z)dz^2$的任何极点，并且由有限多条闭轨线弧，正交轨线弧以及它们的端点所组成。假定L的每个作为轨线弧与正交轨线弧交点的顶点是常点。于是在这样的一个顶点处内角是$\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$。我们用l来表示内角为$\frac{\pi}{2}$的这种顶点的数目；若在L中不存在轨线弧或不存在正交轨线弧，则置$l=0$。

引理 8.2 在L的内区域H中，极点阶数的总和p满足$2p+l\geq 4$。

证 设单叶函数$h(\zeta)$把$\{\mathrm{Im}\zeta>0\}$映照成H且使∞对应一个非顶点的常点。则

$$Q^*(\zeta)=Q(h(\zeta))h'(\zeta)^2$$

在$\mathbf{R}$上为实数，因为L是由轨线弧和正交轨线弧组成。故$Q^*(\zeta)$可经反演延拓为$\hat{\mathbf{C}}$内一个亚纯函数。

设$\zeta_0\in\mathbf{R}$对应于L的顶点z_0。考察二次微分$Q^*(\zeta)d\zeta^2$在ζ_0邻近的轨线，推知：

若两条轨线或两条正交轨线交于z_0，则ζ_0是常点或零点。若一条轨线和一条正交轨线交于z_0，则在z_0的内角为$\frac{3\pi}{2}$时ζ_0为单零点，内角为$\frac{\pi}{2}$时ζ_0为单极点。最后，若z_0不是顶点，则ζ_0是常点。

因为二次微分$Q^*(z)dz^2$在$\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$上恰有$2p$个极点，且因为$\infty$是一个常点，从引理 8.1（8.2 节）推出$2p+l\geq 4$。

引理 8.3 设$Q(z)dz^2$是单连通区域G内的一个二次微分。若G内不存在极点，则一条轨线与一条正交轨线在G内至多相交一次。若至多存在一个极点且为单极点时，则不存在仅由轨线和它们的端点组成的闭若当曲线L。

证 先设G内无极点。若一条轨线和一条正交轨线相交多于

一次，我们考虑由连续的两个交点间的弧所构成的闭若当曲线. 那末 $p=0$, $l\leqslant 2$；但这与 $2p+l\geqslant 4$ 矛盾. 另一结论也可从引理 8.2 推出，因为若 $p=1$ 则 $l\geqslant 2>0$.

引理 8.4 设 $Q(z)dz^2$ 是单连通区域 G 内无极点的二次微分，并设 Γ 是一条轨线. 则 Γ 在两个方向上或终于零点或收敛于 ∂G.

证 因为轨线 Γ: $z(t)$, $\alpha<t<\beta$ 是一条最大轨线弧，且因 G 内无极点，所以只需排除比如说 $t\to\beta$ 时极限集 B 是含有 G 的点之非退化连续统的可能性.

在这种情形，B 包含一个常点 z_0，因为由引理 8.3，Γ 非闭，从 z_0 邻近的轨线结构推知 Γ 与过 z_0 点的正交轨线必然相交无限多次，这同引理 8.3 的第一个结果相矛盾.

定理 8.4 设 $Q(z)dz^2$ 是单连通区域 G 内无极点的一个二次微分. 设 Γ 是从 z_1 到 z_2 的一条轨线弧，L_1 和 L_2 是通过 z_1 和 z_2 的正交轨线弧. 若 C 是任一条在 G 内连接 L_1 和 L_2 的可求长曲线，则

$$l_Q(\Gamma)\leqslant l_Q(C), \tag{8}$$

这表明在 Q 度量下，轨线是连接其任何两点的最短曲线. 但是如果 G 不是单连通域或包含一个极点，那么如我们在图 8.1(c) 中所看到的，这一结论就不再成立.

这一定理是由泰希谬勒尔 (1939) 用微分几何的方法首先证明的.

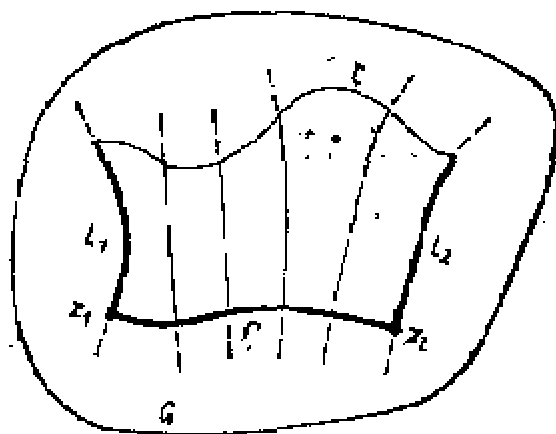


图 8.4

证 可假定 C 是一条逐段解析若当弧，如果它与 Γ 相交，则仅交于 z_1 与 z_2. 因由引理 8.3，Γ 与 $L_j(j=1,2)$ 仅交于 z_j，我们可以由 C，Γ 以及 L_1 和 L_2 的一段弧构造一条若当曲线. 设 H 是这条若当曲线的内区域(见图 8.4).

如引理 8.4 所表明的，对 $w\in\Gamma$，过 w 的正交轨线在两个方向上或以 $Q(z)dz^2$ 的零点为端点或趋于 ∂G. 由引理 8.3 它不会回到 Γ. 在第二种情形因而可找到这条正交轨线上的一段弧，它除端点 $w\in\Gamma$ 和 $w'\in C$ 外全位于 H 内.

设 $n=1,2,\cdots$. 因为只存在 $Q(z)dz^2$ 的有限多个零点，可由点 $w_\mu(\mu=1,2,\cdots,k-1)$ 把 Γ 分成 Q 距离小于 $\frac{1}{n}$ 的子弧 $\Gamma_1,\cdots,\Gamma_k$ 使得存在从 w_μ 到 C 上的点 w'_μ 的正交轨线弧 B_μ，这些弧段是 H 的横截线，把 H 分成子区域 $H_1,H_2,\cdots,H_k$. 约定 $w_0=z_1$，$B_0=L_1$ 及 $w_k=z_2$，$B_k=L_2$.

设 H_μ 是一个子区域，它不含任何零点. H_μ 的边界由 Γ_μ，B_μ，$B_{\mu-1}$ 和 C 的一段弧 C_μ 组成. 因为 $\sqrt{Q(z)}$ 在 H_μ 内解析，由柯西积分定理有

$$\int_{\Gamma_\mu}+\int_{B_\mu}-\int_{B_{\mu-1}}-\int_{C_\mu}\sqrt{Q(z)}\,dz=0.$$

因 $Q(z)dz^2$ 在 Γ_μ 上大于零而在 B_μ 和 $B_{\mu-1}$ 上小于零，故

$$\begin{aligned}l_Q(\Gamma_\mu)=\int_{\Gamma_\mu}\sqrt{Q(z)}\,dz&=\mathrm{Re}\int_{C_\mu}\sqrt{Q(z)}\,dz\\&\leqslant\int_{C_\mu}\sqrt{|Q(z)|}\,|dz|=l_Q(C_\mu).\end{aligned}$$

以 m 表示 H 中 $Q(z)dz^2$ 的零点个数，即得

$$\begin{aligned}l_Q(\Gamma)&<\frac{m}{n}+\sum_{\mu=1}^{k}{}'l_Q(\Gamma_\mu)\\&\leqslant\frac{m}{n}+\sum_{\mu=1}^{k}l_Q(C_\mu)\leqslant\frac{m}{n}+l_Q(C),\end{aligned}$$

其中撇号表示对一切不含零点的区域求和. 令 $n\to\infty$ 即得到 (8) 式.

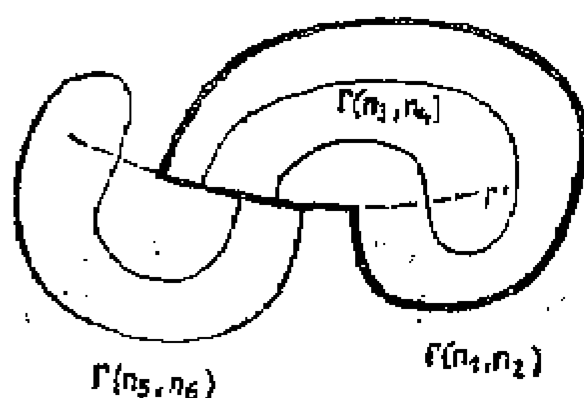


图 8.5

4. 现在我们证明，难以处理的稠密域在应用上比较重要的许多场合中不会出现。

定理 8.5（三极定理） $\hat{C}$ 上至多有三个不同极点的二次微分没有稠密域.

证 假定存在一个稠密域。因为从 Π_0 的点出发的轨线只有有限多条，故存在一条轨线 Γ: $z(s)$, $0 \leqslant s < \infty$ 使得在某个常点 $z_0 \neq \infty$ 的邻域内稠密. 可假定 $\infty \notin \Gamma$. 用 Q 长度 s 将 Γ 参数化. 设 Γ' 是过 z_0 的正交轨线. 由常点 z_0 邻近轨线的局部结构，知存在一小段若当弧 Γ'_0, $z_0 \in \Gamma'_0 \subset \Gamma'$，它同 Γ 的交点在 Γ'_0 上稠密. 这些交点可记之为 $z_\nu = z(s_\nu)(0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots, s_\nu \to \infty)$. 因 Γ 是一条若当弧而有 $z_\mu \neq z_\nu$. Γ 在 z_μ 和 z_ν 间的弧段记为 $\Gamma(\mu, \nu)$，而 Γ' 的子弧记为 $\Gamma'(\mu, \nu)$. 设 $G(\mu, \nu)$ 和 $H(\mu, \nu)$ 是闭若当曲线 $\Gamma(\mu, \nu) \cup \Gamma'(\mu, \nu)$ 的内区域和外区域.

置 $n_1 = 1$. 若 $G(1,2)$ 的一内角为 $\frac{\pi}{2}$ 而另一角为 $\frac{3\pi}{2}$，则置 $n_2 = 2$. 若两内角都等于 $\frac{\pi}{2}$，则 $\Gamma(2,3) \subset H(1,2)$；若两内角都等于 $\frac{3\pi}{2}$，则 $\Gamma(2,3) \subset G(1,2)$. 在这两种情形，我们规定 n_2 为使 $z_{n_2} \in \Gamma'(1,2)$ 并且大于 2 的最小数. 这样，对上述三种情形，$G(n_1, n_2)$ 和 $H(n_1, n_2)$ 都有一个内角为 $\frac{\pi}{2}$，有一个内角为 $\frac{3\pi}{2}$. 因而 Γ_0 既

与 $G(n_1,n_2)$ 相交也与 $H(n_1,n_2)$ 相交.

我们断定存在无限多个 z_ν 同时属于 $G(n_1,n_2)$ 和 $H(n_1,n_2)$. 因此我们可选出 $n_j(j=3,\cdots,6)$, $n_2<n_3<\cdots<n_6$, 使得 $\Gamma(n_3,n_4)$ 是 $G(n_1,n_2)$ 的一条横截线且 $\Gamma(n_5,n_6)$ 是 $H(n_1,n_2)$ 的一条横截线. 这些横截线把 $G(n_1,n_2)$ 和 $H(n_1,n_2)$ 分为四个不相交的若当区域的和. 应用引理 8.2, 知其中的每一个都含有一个极点, 因为在每种情形, 至多有三个内角为 $\frac{\pi}{2}$.

问　　题

1. 研究下列二次微分的整体结构:

(a) $\frac{1}{z(z-r)(1-rz)}dz^2 \qquad (0<r<1)$

(b) $\frac{c}{(z^2-1)(z^2-r^2)}dz^2 \qquad (c\in\mathbf{C}, r>1)$

(c) $\left(\frac{1}{z^m}+\frac{c}{z}\right)^2dz^2 \qquad (c\in\mathbf{C}, m\geqslant 2)$

2. 设 $f(z)$ 是一多项式. 求证集 $\{\mathrm{Re}f(z)=常数\}$是 $-\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2dz^2$ 的轨线并证明只存在圆域和环域.

3. 设 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的一个二次微分, 它在∞有一个 $n+2(n\geqslant 2)$ 阶极点以及至多还有一个单极点. 若 z_0 是一个零点, 求证存在两段若当弧, 它们由轨线组成并且除端点 z_0 和∞外不相交, 使得在∞处两弧的交角至少为 $\frac{2\pi}{n}$ (对照 4.3 节中定理 4.5 的证明).

8.4 容许集与容许函数

1. 首先叙述适用于本章的下列假定与记号.

设 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的一个二次微分, $G\subset\hat{\mathbf{C}}$ 为一开集. 如果 $\hat{\mathbf{C}}\setminus G$ 由有限条轨线弧和有限个临界点组成并且

(i) $\Pi_1\subset G$,

(ii) G 不包含单极点.

则称 G 为(关于 $Q(z)dz^2$ 的)一个容许集．我们没有假定 G 是连通集．

设 G 是一个容许集．如果函数 $f(z)$ 在 G 内单叶并且

(i′) 当 $z\in\Pi_2$ 时 $f(z)=z$，

(ii′) $f(G)$ 不包含二次微分的单极点，

(iii′) 若 z_j 是阶数 >2 的一个极点，当 $z\to z_j$ 时有

$$f(z)=z+O((z-z_j)^2),\quad 当\ z_j\neq\infty,$$

$$f(z)=z+O(1),\quad 当\ z_j=\infty,$$

则称 $f(z)$ 为容许函数．

设 $f(z)$ 是一个容许函数．如果在 $G\times[0,1]$ 内存在一个连续函数 $f(z,t)$，对 $z\in G$ 有

$$f(z,0)=z,\quad f(z,1)=f(z),$$

使得曲线

$$(1)\qquad C_z: f(z,t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

满足

(i*) 对 $z\in\Pi_2$，$C_z=\{z\}$；对 $z\in G\setminus\Pi_2$，$C_z\cap\Pi_2=\varnothing$，

(ii*) 对 $z\in G$，C_z 不包含单极点．

(iii*) 若 z_j 是一个阶数 >2 的极点，当 $z\to z_j$ 时有

$$\log\frac{f(z)-z_j}{z-z_j}=\int_{C_z}\frac{d\zeta}{\zeta-z_j}\to 0\quad(若\ z_j\neq\infty),$$

$$\log\frac{f(z)}{z}=\int_{C_z}\frac{d\zeta}{\zeta}\to 0\quad(若\ z_j=\infty).$$

则称 $f(z)$ 具有到恒等映照的容许同伦．显然，(i*)，(ii*)，(iii*) 蕴含着 (i′)，(ii′)，(iii′)．对 $0<t<1$，我们没有假定 $f(z,t)$ 在 G 内解析．

例 8.1 考虑 S 类解析单叶函数

$$h(\zeta)=\zeta+\sum_{\nu=2}^{\infty}a_\nu\zeta^\nu\quad \zeta\in D.$$

在 7.2 和 7.3 节中，我们研究过 S 类中泛函

$$\Phi(h)=X(a_2,a_3,\cdots,a_n)\quad(n=2,3,\cdots)$$

的最大值问题，知每个极值函数 $h\in S$ 满足谢非尔微分方程

$$\left(\zeta\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}\right)^2\sum_{\nu=1}^{n-1}\gamma_\nu h(\zeta)^{-\nu}=q(\zeta),$$

且在 $|\zeta|=1$ 上有 $q(\zeta)\geqslant 0$，其中的 $\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$ 是决定于极值函数 $h(\zeta)$ 的 $n-2$ 个系数 $a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的复常数(见(7.3.9)式)。

因此极值区域 $G=h(D)$ 是由位于二次微分

$$(2)\qquad -\left(\sum_{\nu=3}^{n+1}\gamma_{\nu-2}z^{-\nu}\right)dz^2$$

的轨线上的一些裂纹界成，这个二次微分在 0 点有一个阶数为 $n+1\geqslant 3$ 的极点(若 $\gamma_{n-1}\neq 0$)，在∞至多有一个单极点，此外没有其他极点(见 8.2 节问题 5)，因而 $G=h(D)$ 是一个容许区域。若 $g(\zeta)$ 是 S 类中任一函数，则单叶函数

$$f(z)=g(h^{-1}(z))\quad(z\in G)$$

满足 $f(0)=0$，因而是关于二次微分(2)的容许函数。最后，由于 $G=h(D)$ 和 $f(G)=g(D)$ 是单连通区域，存在从 $f(G)$ 到 G 的一个同伦，它保持 0 点固定并在别处不取 0 值。因而可找到 $f(z)$ 到恒等映照的一个容许同伦(对照本节的问题 1 和 2)。

假如对于某个给定点 $\zeta_1\neq 0$，考虑泛函

$$\Phi[h]=X(h(\zeta_1),\ h'(\zeta_1)),$$

情况就更困难了。谢非尔微分方程引出一个在 $h(\zeta_1)$ 具有二阶极点的二次微分。因对于所有的函数 $g\in S$，$h(\zeta_1)=g(\zeta_1)$ 不再成立，故由(1)函数 $f(z)=g(h^{-1}(z))$ 不是容许函数。因而必须限制该类函数是满足 $g(\zeta_1)=z_1$ 且 z_1 固定的那些函数。对 S 的这一子类确能导出一个谢非尔型的微分方程，但本书不讨论这类带有边值条件的泛函最大值问题(见 Grassmann 1973)。

2. 现在来研究具有一个到恒等映照的容许同伦的单叶函数。

引理 8.5 设 E 是 $G\setminus\Pi_2$ 的一个紧子集。则存在 $M=M(E)<\infty$，使得对每个 $z\in E$ 存在一条逐段解析的曲线 C_z' 在 $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Pi_1$ 内同伦于 C_z 并且满足 $l_Q(C_z')<M$。

证 设 $z_0\in E$。C_{z_0} 可代之以在 $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Pi_1$ 内与 C_{z_0} 同伦的一条内

接折线 C'_{z_0}. 显然，$l_Q(C'_{z_0})<\infty$. 选取以 z_0 和 $w_0=f(z_0)$ 为心的充分小圆盘 $D(z_0)$ 和 $D^*(w_0)$，满足 $f(D(z_0))\subset D^*(w_0)$，并使得 $D(z_0)$ 和 $D^*(w_0)$ 内任意两点分别可用 $D(z_0)$ 和 $D^*(w_0)$ 内 Q 长度小于 1 的曲线相连接.

设 $z\in D(z_0)$. 则存在曲线 $S:\sigma(s):0\leqslant s\leqslant 1$ 满足 $\sigma(0)=z_0$, $\sigma(1)=z$, $S\subset D(z_0)$ 且 $l_Q(S)<1$. 映照 $(s,t)\mapsto f(\sigma(s),t)$ 表明 C_z 在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内同伦于 $-S+C_{z_0}+f(S)$. 由以上所述，$f(S)$ 同伦于一条连接 w_0 和 $f(z)$ 且 $l_Q(T)<1$ 的曲线 T. 因此 C_z 同伦于 $C'_z=-S+C'_{z_0}+T$，并且有 $l_Q(C'_z)<l_Q(C'_{z_0})+2$. 应用海涅-波莱尔覆盖定理即得出引理的结论.

现设 $z_0\in\Pi_2$. 存在邻域 $V(z_0)$ 不含除 z_0 外的任何临界点. 由假定 (i) 和 (i*)，可选取以 z_0 为心的充分小圆盘 $\tilde{U}(z_0)\subset G$ 使得对 $z\in\tilde{U}(z_0)$ 有 $C_z\subset V(z_0)$.

引理 8.6 每一点 $z_0\in\Pi_2$ 有一邻域 $U(z_0)$ 具有下列性质：对 $z\in U(z_0)\backslash\{z_0\}$，存在从 z 到 z' 的轨线弧 Γ_z 和从 z' 到 $f(z)$ 的正交轨线弧 L_z，使得 Γ_z+L_z 在 $V(z_0)\backslash\{z_0\}$ 内同伦于 C_z. 令

$$U=\bigcup_{z_0\in\Pi_2}U(z_0) \tag{3}$$

证 若 z_0 是二阶极点，则容易找到具有上述性质的 $U(z_0)\subset\tilde{U}(z_0)$，故可设 z_0 是一个阶数 $n\geqslant 3$ 的极点. 不妨设 $z_0=0$，于是

$$Q(z)=a_{-n}z^{-n}+a_{-n+1}z^{-(n-1)}+\cdots.$$

存在 $\alpha>0$ 和 $\rho>0$，使得当 $0<|z|<\rho$ 时在 $D_z=\{\zeta:|\zeta-z|<\alpha|z|\}$ 内 $\sqrt{Q(\zeta)}$ 的每个分支所取的值落入不含 0 点的某个半平面内. 这便推知(对照 2.3 节定理 2.11) 函数

$$\Phi(w)=\int_z^w\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta\quad(w\in D_z)$$

单叶. z 和 ∂D_z 的 Q 距离

$$\geqslant\alpha|z|\inf_{\zeta\in D_z}|Q(\zeta)|^{\frac{1}{2}}\geqslant K_1|z|^{1-\frac{n}{2}}$$

K_1 是某个常数. 因 Φ 把 Q 度量变成欧氏度量，$\Phi(D_z)$ 包含一个以

0 点为心半径为 $K_1|z|^{1-\frac{n}{2}}$ 的圆盘 D_z^*.

另一方面,由 (iii') 有 $f(z)=z+O(z^2)$, z 和 $f(z)$ 的 Q 距离小于或等于 $K_2|z|^{2-\frac{n}{2}}$, K_2 是某个常数. 故对充分小的 ρ 有 $\Phi(f(z))\in D_z^*\subset\Phi(D_z)$. 于是 $U(0)=\tilde{U}(0)\cap\{|z|<\rho\}$ 满足所要求的性质,因为 Φ 把轨线和正交轨线分别变成水平和铅直直线,并且由 (iii*), C_z 同伦于 D_z 内的一条曲线.

由单值性定理推知

$$\int_{C_z}\sqrt{Q(\zeta)}d\zeta=\int_{\Gamma_z+L_z}\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta,$$

因此,

$$\mathrm{Re}\int_{C_z}\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta=\int_{\Gamma_z}\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta, \tag{4}$$

其中在 C_z 和 Γ_z 上 $\sqrt{Q(\zeta)}$ 的分支选取要使得它们在 z 点重合.

记

$$\Delta(z)=\int_{C_z}\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta. \tag{5}$$

(比较 (1) 式)在一个属于 Π_2 的极点的邻域内,我们常常会遇到如下形式的一些表达式

$$\sqrt{Q(z)}\,\Delta(z),\quad \sqrt{Q(z)}\,\overline{\Delta z}, \tag{6}$$

$$\Delta'(z)\overline{\Delta(z)}=[\sqrt{Q(f(z))}\,f'(z)-\sqrt{Q(z)}\,]\overline{\Delta(z)},$$

因此我们约定:

(iv) 在 (6) 的第一因式中, $\sqrt{Q(z)}$ 的分支选取同积分 (5) 中的选取相同.

于是表示式 (6) 与 $\sqrt{Q(z)}$ 的分支选取无关.

引理 8.7 设 Γ 是从 z_1 到 z_2 的轨线弧, Γ' 是从 z_1' 到 z_2' 的任一可求长曲线. 若存在从 z_j 到 z_j' 的正交轨线弧 $L_j(j=1,2)$ 使得闭曲线 $\Gamma+L_2-\Gamma'-L_1$ 在 $\Pi\setminus\Pi_1$ 内同伦于 0, 则

$$l_Q(\Gamma')\geqslant l_Q(\Gamma). \tag{7}$$

证 此处必须应用多连通区域 $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Pi_1$ 的万有覆盖曲面 F. 设

$\phi(w)$ 把 $D=\{|w|<1\}$ 映成 F. 则

(8) $$Q^*(w)dw^2=Q(\phi(w))\phi'(w)^2dw^2$$

是D上的一个无极点的二次微分. 因为 $C=\Gamma+L_2-\Gamma'-L_1$ 在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内同伦于 0,每条曲线 $\phi^{-1}(C)\subset D$ 是闭的. 因此定理 8.4 表明

$$l_{Q^*}(\phi^{-1}(\Gamma'))\geqslant l_{Q^*}(\phi^{-1}(\Gamma)),$$

因为由 (8) 式, 一条曲线的 Q^* 长度与它的象曲线的 Q 长度相同, 故推出 (7) 式.

定理 8.6 若 Γ 是闭轨线, Γ' 在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内同伦于 Γ, 则

(9) $$l_Q(\Gamma')\geqslant l_Q(\Gamma).$$

证 设 B 是 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内连接 Γ 和 Γ' 的逐段光滑曲线. 若 $n\Gamma$ 表示曲线 Γ 被通过 n 次, 则 $n\Gamma'$ 和 $-B+n\Gamma+B$ 在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内同伦. 因此由引理 8.7 (L_1, L_2 退化成点)有

$$nl_Q(\Gamma')\geqslant nl_Q(\Gamma)-2l_Q(B),$$

若除以 n 再令 $n\to\infty$ 即得 (9) 式.

定理 8.7 设 $f(z)$ 在容许集 $G\subset\hat{\mathbf{C}}$ 内单叶, 且存在一个到恒等映照的容许同伦, 则对 $G\backslash\Pi_1$ 内的每个紧子集 E 存在常数 $M=M(E)$, 使得对每一条两端在 E 内的轨线弧 Γ 有

(10) $$l_Q(f(\Gamma))\geqslant l_Q(\Gamma)-2M.$$

证 设 M 按引理 8.5 选取. 若 z_1, z_2 是 Γ 的端点, 则由该引理, 存在曲线 C'_{z_j} 在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash\Pi_1$ 内同伦于 $C_{z_j}(j=1,2)$, 使得 $l_Q(C'_{z_j})<M$. 因而由于闭曲线 $\Gamma+C'_{z_1}-f(\Gamma)-C'_{z_2}$ 在 $\hat{\mathbf{C}}/\Pi_1$ 内同伦于 0, 于是从引理 8.7 推出 (10) 式.

定理 8.8 假定满足同样的假设条件. 若 z_1 和 $z_2\in U$ (见(3)式)且 Γ 是从 z_1 到 z_2 的轨线弧, 则

(11) $$l_Q(f(\Gamma))-l_Q(\Gamma)\geqslant\operatorname{Re}\int_{C_{z_1}}\sqrt{Q(z)}\,dz-\operatorname{Re}\int_{C_{z_2}}\sqrt{Q(z)}\,dz,$$

其中 $\sqrt{Q(z)}$ 的分支由在 Γ 上 $\sqrt{Q(z)}\,dz>0$ 的条件而确定, 然后再延拓到 C_{z_1} 和 C_{z_2} 上去.

证 由引理 8.6, 存在从 z_j 到 z'_j 的轨线弧 $\Gamma_{z_j}(j=1,2)$ 使得

由(4)式它们满足

(12) $$\mathrm{Re}\int_{Cz_j}\sqrt{Q(z)}\,dz=\int_{\Gamma_{z_j}}\sqrt{Q(z)}\,dz.$$

再用正交轨线弧 L_j 连接 z_j' 和 $f(z_j)$，并且使从 z_1' 到 z_2' 的轨线弧 Γ' 连同 L_1, L_2 及 $f(\Gamma)$ 组成的曲线同伦于 0。

应用引理 8.7 (z_j 和 z_j' 分别代之以 z_j' 和 $f(z_j)$)，即得

(13) $$l_Q(\Gamma')\leqslant l_Q(f(\Gamma)).$$

因为 Γ 是轨线弧，故

$$l_Q(\Gamma)=\int_\Gamma\sqrt{Q(z)}\,dz=\int_{\Gamma_{z_1}}\sqrt{Q}\,dz+\int_{\Gamma'}\sqrt{Q}dz-\int_{\Gamma_{z_2}}\sqrt{Q}\,dz,$$

点 z_1, z_2, z_1', z_2' 全位于同一条轨线上。因为 Γ' 的积分不大于 $l_Q(\Gamma')$，从(12)式和(13)式即可推出结论(11)式。

问　　题

这些问题包含关于一个给定容许函数到恒等映照的容许同伦的存在性的一些简单的判别准则。这些判别准则对于一般系数定理的大多数应用(见 8.7 节)是足够了。注意到若将它应用于 f 在容许集 $G'\subset G$ 上的一个限制来代替应用于 f 时仍保持不变。有时对这种限制来寻求容许同伦要容易一些，因为 G' 比 G 可以具有更多的分集(见题 3)。

1. 设 $f_0, f_1\in S$ 且 $G_0=f_0(D)$, $G_1=f_1(D)$，此处 $D=\{|z|<1\}$。求证存在 $D\times[0,1]$ 内连续函数 $f(z,t)$，使得

$$f(z,0)=f_0(z),\ f(z,1)=f_1(z);\ f(0,t)=0(0\leqslant t\leqslant 1),$$
$$f(z,t)\in G_0\cup G_1\ (z\in D, 0\leqslant t\leqslant 1),$$

当 $z\to 0$ 时，关于 t 一致地有 $\arg[z^{-1}f(z,t)]\to 0$。

2. 设 f 是容许集 G 内的容许函数。设 G 的每个分集单连通且至多包含 Π_1 的一个点。求证 f 存在一个到恒等映照的容许同伦(注意：对 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的二次微分，若每个分集至多包含两个极点则结论仍成立)。

3. 设 f 是容许集 G 内的容许函数。假定存在函数 $f(z, t)$，该函数至少对位于一个带域的边界上阶数大于 2 的那些极点满足(i*)，(ii*)和(iii*)。求证存在一个容许集 $G'\subset G$ 使得 f 在 G' 的限制具有一个到恒等映照的容许同伦(见 Jenkins 51 页)。

4. 设 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的二次微分 Qdz^2 恰好具有两个二阶极点且无其他极点，设 G 是容许集． 求证 G 内每个容许函数具有一个到恒等映照的容许同伦（假定 $Q(z)dz^2 = z^{-2}dz^2$ 且令 $f(z,t) = z(z^{-1}f(z))^t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$).

8.5 面积偏差的估计

本节作如下假定：$Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的二次微分；G 是容许集；G 内单叶函数 $f(z)$ 是容许函数且具有到恒等映照的容许同伦．我们仍沿用 8.4 节中引入的约定 (iv)．

我们来估计在共形映照 $f(z)$ 下 Q 面积（见 8.2 节）的偏差．在下一节中将应用这些估计来证明珍肯斯的一般系数定理．

1. 首先证明一个下界估计．定义

$$f_Q(z) = \left|\frac{Q(f(z))}{Q(z)}\right|^{\frac{1}{2}} \cdot |f'(z)| \qquad (z \in G), \tag{1}$$

$$\Delta(z) = \int_{C_z} \sqrt{Q(\zeta)}\, d\zeta \qquad (z \in G). \tag{2}$$

定理 8.9 对于每一点 $z_j \in \Pi_2$ 存在一条分隔 $\hat{\mathbb{C}} \backslash U_j$ 和 z_j 的逐段解析若当曲线 $J_j \subset U_j$（见 (8.4.3)）使得

$$A_Q(f(G')) - A_Q(G') \tag{3}$$

$$\geqslant \iint_{G'} (f_Q(z)-1)^2 |Q(z)|\, d\Omega - 2 \sum_{z_j \in \Pi_2} \int_{J_j} \mathrm{Re}\Delta z \mathrm{Im}[\sqrt{Q(z)}\, dz]$$

其中 G' 是 $G \backslash \bigcup J_j$ 的不含点 z_j 的分集，J_j 的定向取作使 G' 位于其右．

证 (a) 设 $H \subset \hat{\mathbb{C}} \backslash \Pi$ 是一个单连通域，它被

$$\zeta = \varphi(z) = \int \sqrt{Q(z)}\, dz \tag{4}$$

映照成矩形 $R = \{\xi + i\eta;\ \alpha_1 \leqslant \xi \leqslant \alpha_2,\ \beta_1 \leqslant \eta \leqslant \beta_2\}$ 的内部．故

$$L_k = \{\varphi^{-1}(\zeta):\ \mathrm{Re}\zeta = \alpha_k,\ \beta_1 \leqslant \eta \leqslant \beta_2\} \quad (k = 1, 2) \tag{5}$$

是两条正交轨线弧（可以相重）．过 $z \in H$ 的轨线弧 $\Gamma(z)$ 有端点 $z_1(z) \in L_1$ 及 $z_2(z) \in L_2$.

首先假定 $H \subset G$．由 Q 面积的定义 (8.2.7)，有

(6) $$A_Q(H) = \iint_H |Q(z)|\,dQ,$$

(7) $$A_Q(f(H)) = \iint_H |Q(f(z))|\,|f'(z)|^2 dQ.$$

故由 (1) 式得到

(8) $$A_Q(f(H)) - A_Q(H)$$
$$= \iint_H (f_Q(z) - 1)^2 |Q(z)|\,dQ + 2\iint_H (f_Q(z) - 1)|Q(z)|\,dQ.$$

作代换 $z = \varphi^{-1}(\zeta)$，最后的积分化为

(9) $$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left(\int_{\alpha_k}^{\alpha_2}\left[|Q(f(\varphi^{-1}(\xi+i\eta))|^{\frac{1}{2}}\left|\frac{d}{d\zeta}f(\varphi^{-1}(\xi+i\eta))\right|-1\right]d\xi\right)d\eta$$
$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2}(l_Q[f(\Gamma(\varphi^{-1}(\alpha_k+i\eta)))] - l_Q[\Gamma(\varphi^{-1}(\alpha_k+i\eta))])d\eta$$

这对 $k = 1$ 和 $k = 2$ 均成立. 用 (5) 式定义的 L_k，作代换 $\zeta = \varphi(z)$ 得到

(10) $$2\iint_H (f_Q(z) - 1)|Q(z)|\,dQ$$
$$= 2\int_{L_k}(l_Q[f(\Gamma(z))] - l_Q[\Gamma(z)])\,\mathrm{Im}[\sqrt{Q(z)}\,dz],$$

其中 $\mathrm{Im}[\sqrt{Q(z)}\,dz] > 0$.

现在去掉 H 包含于容许区域 G 的假定，则 $H\backslash G$ 由有限条轨线弧组成. 若用这些轨线划分 H 然后把各部分的积分值加起来，即知 (10) 式在一般的情况下仍成立.

(b) 由整体结构定理 (8.3 节)，$\hat{\mathbf{C}}$ 是有限个圆域、环域、端域、带域和稠密域的并集. 对定理 8.3 中排除的两种情形需作一些显而易见的修改.

设 G_1 是所有环域和圆域的并集. 在 G_1 中去掉由闭轨线 l_i 界成的二阶极点 z_i 的邻域，并设 G_1' 是剩下的集合. 考虑 G_1' 中的一个二连通区域，用一条正交轨线弧连接它的两个边界分集，所得的单连通域 H 具有 (a) 中所考虑的形式. 因为 $\Gamma(z)$ 是闭的，f 同伦于恒等映照，从定理 8.6 推知 $l_Q[f(\Gamma(z))] \geqslant l_Q[\Gamma(z)]$，故由 (10) 式得到

(11) $$\iint_H (f_Q(z)-1)|Q(z)|dQ \geqslant 0.$$

对各个集 H 可引用方程 (8). 这些关系式是在除去一条曲线后的分集上获得的. 由于该曲线不影响面积积分, 故由 (11) 式得到

(12) $$A_Q(f(G_1')) - A_Q(G') \geqslant \iint_{G_1'} (f_Q(z)-1)|Q(z)|dQ.$$

(3) 式中的后一积分是 0, 因为 J_i 是闭轨线.

再设 G_2 是所有带域和端域的并集. 考虑这些区域中的一个, 并且选取在 (a) 中所讨论的那种形式的一个区域 H, 其 α_1 和 α_2 充分大使由 (5) 式确定的 L_k 位于 U 中. 设 G_2' 是所有这些区域的并集. 因为每点 $z_j \in \Pi_2$ 的某个邻域被带域和端域所覆盖, 故可选取区域使 $\partial(G_2\setminus G_2')$ 由逐段解析若当曲线 $J_j \subset U_j$ 组成.

将定理 8.8 应用于从 $z_1(x)$ 到 $z_2(x)$ 的轨线弧 Γ_1 并由 (8.4.5) 式得到

(13) $$l_Q[f(\Gamma(x))] - l_Q[\Gamma(x)] \geqslant \mathrm{Re}\Delta(z_2(x)) - \mathrm{Re}\Delta(z_1(x)),$$

其中 $\sqrt{Q}$ 的分支系由 H 中选取的分支经延拓而确定. 因此从 (10) 式推知对 $k=1$ 和 $k=2$ 有

(14) $$\begin{aligned} &2\iint_H (f_Q(z)-1)|Q(z)|dQ \\ &\geqslant 2\int_{L_k} \mathrm{Re}[\Delta(z_2(x))]\mathrm{Im}[\sqrt{Q}\,dz] \\ &\quad - 2\int_{L_k} \mathrm{Re}[\Delta(z_1(x))]\mathrm{Im}(\sqrt{Q}\,dz), \end{aligned}$$

式中单独的每一个积分均与 k 的选取无关.

在第一个积分中选取 $k=2$, 而在第二个积分中取 $k=1$, 即得右端等于

(15) $$2\left(\int_{L_1} + \int_{L_2}\right) \mathrm{Re}\Delta(z)\mathrm{Im}[\sqrt{Q}\,dz],$$

其中 L_1 和 L_2 的取向使 H 位于其左. 由约定 (iv) (8.4 节), 此时积分与 $\sqrt{Q}$ 的分支选取无关.

因此由 (8), (14) 和 (15) 式, 并对所有的域 H 作和得到

(16) $$A_Q(f(G_2'))-A_Q(G_2')\geqslant\iint_{G_2'}(f_Q(z)-1)^2|Q(z)|dQ$$
$$+2\sum_j\int_{-I_j}\mathrm{Re}\Delta(z)\mathrm{Im}\{\sqrt{Q}\,dz\},$$

其中 I_j 的取向使 G_2' 位于其左；我们已用到了后一被积函数在位于轨线上的那些 I_j 中取值为 0.

(c) 剩下的问题是要对稠密域建立下界估计；正如三极定理(见 8.4 节)所表明的，在很多应用中稠密域是不存在的，从而定理 8.9 的结论 (3) 已由 (12) 式和 (16) 式推出.

引理 8.8 *若 B 是稠密域，则*

(17) $$A_Q(f(B))-A_Q(B)\geqslant\iint_B(f_Q(z)-1)^2|Q(z)|dQ.$$

证 由于容许集 G 补余集仅由有限条轨线弧组成，又因只有有限个临界点，因此只存在有限多条轨线与 ∂G 相交或从 Π_0 出发. 从 B 中删去这些轨线得到集合 B_0. 由整体结构定理该集具有下列性质：

(α) $B_0\subset G\setminus\Pi_0$，且 $\bar{B}_0$ 是 $\hat{C}\setminus\Pi_0$ 的一个紧子集；

(β) 每条与 B_0 相交的轨线必整个地包含于 B_0，并且 B_0 内不存在封闭轨线；

(γ) $B\setminus B_0$ 的(二维勒贝格)测度为 0.

设 $z\in B_0$，从 z 点出发，在两个方向上以 Q 长度 t 描过 z 点的轨线达到两个点 z_t 和 z_{-t}. 对 B_0 的每个子集 E，定义

(18) $\chi_t(E,z)=$ 集合 $E\cap\{z_t,z_{-t}\}$ 的元素个数，故 $0\leqslant\chi_t\leqslant 2$.

对互不相交的集合 E_ν 有

(19) $$\chi_t\Big(\bigcup_\nu E_\nu,\ z\Big)=\sum_\nu\chi_t(E_\nu,z).$$

置

(20) $E^{(t)}=\{z;\ E\cap\{z_t,z_{-t}\}\neq\varnothing\}=\{z;\ \chi_t(E,z)\neq 0\}.$

由 8.3 节开头的讨论知对固定的 $t>0$，B_0 中每点具有邻域 W 使 $z\longmapsto z_t$ 和 $z\longmapsto z_{-t}$ 是 $W\cap B_0$ 到某个集 W_t 和 W_{-t} 的 Q 等距共形映照. 我们推出

$$(21)\qquad A_Q(E)=0\Rightarrow A_Q(E^{(t)})=0.$$

并进而断定对 $\hat{\mathbf{C}}$ 上每个非负波莱尔可测函数 $\varphi(z)$ 有

$$(22)\qquad \iint_{W\cap B_0}[\varphi(z_t)+\varphi(z_{-t})]|Q|dQ = \left(\iint_{W_t}+\iint_{W_{-t}}\right)\varphi(z)|Q|dQ = \iint_{\mathbf{C}}\varphi(z)\chi_t(W\cap B_0,z)|Q|dQ.$$

同映照 $z\mapsto z_t$ 和 $z\mapsto z_{-t}$ 只是局部定义的情形相反，函数 $\varphi(z_t)+\varphi(z_{-t})$ 和 $\chi_t(E,z)$ 是整体定义的.

现在假定 E 是开集. 上述的邻域 W 确定了集合 $E\cap B_0$ 上的一个维太利覆盖. 故由维太利覆盖定理 (Natanson, 90页)，可选取至多可数多个互不相交的邻域 $W^{(\nu)}\subset E$ 使得集合

$$(E\cap B_0)\Big\backslash\bigcup_\nu W^{(\nu)}$$

具有零测度. 因 (22) 式对某个 $W^{(\nu)}$ 成立，作和得到

$$(23)\qquad \iint_{E\cap B_0}[\varphi(z_t)+\varphi(z_{-t})]|Q|dQ = \iint_{\mathbf{C}}\varphi(z)\chi_t\left(\bigcup_\nu W^{(\nu)}\cap B_0,z\right)|Q|dQ = \lambda\iint_{(E\cap B_0)^{(t)}}\varphi(z)|Q|dQ,$$

$1\leqslant\lambda\leqslant 2$，其中用到了 (19) 式和 (21) 式.

若在 (23) 式中置 $\varphi(z)=1$，即得

$$(24)\qquad A_Q((E\cap B_0)^{(t)})\leqslant 2A_Q(E\cap B_0)\quad (t>0).$$

因为每一闭集都是开集套序列的交，从而知 E 为闭集时 (24) 式仍成立.

因由性质 (β) 有 $(E\cap B_0)^{(t)}\subset B_0$，故从 (23) 式我们还推知

$$\iint_{E\cap B_0}[\varphi(z_t)+\varphi(z_{-t})]|Q|dQ\leqslant 2\iint_{B_0}\varphi(z)|Q|dQ.$$

从 0 到 τ 积分该不等式并且在左端交换积分的次序即得

(25) $$\iint_{E\cap B_0}\left(\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(z_t)dt\right)|Q|d\Omega\leqslant\iint_{B_0}\varphi(z)|Q|d\Omega.$$

设给定 $\varepsilon>0$，则存在 $G\cap B$ 的一个开子集 F，$\bar{F}\subset G$，使得 $A_Q(B_0\backslash F)<\varepsilon$. 故由 (24) 式有 $A_Q((B_0\backslash F)^{(\tau)})<2\varepsilon$. 若置

$$F(\tau)=\{z\in B_0:\ \{z_\tau, z_{-\tau}\}\subset F\},$$

则 $B_0\backslash F(\tau)\subset(B_0\backslash F)^{(\tau)}$，因此有

(26) $$A_Q(F(\tau))\geqslant A_Q(B_0)-2\varepsilon.$$

因 F 是开集，易知 $F(\tau)$ 是 B_0 与一个开集的交. 故 (25) 式对 $E\cap B_0=F(\tau)$ 也成立.

选取 $\varphi(z)=f_Q(z)=\left|\dfrac{Q(f(z))}{Q(z)}\right|^{\frac{1}{2}}|f'(z)|$，则

$$\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(z_t)dt=\int_{\Gamma_\tau(z)}|Q(f(\zeta))|^{\frac{1}{2}}|f'(\zeta)||d\zeta|$$
$$=l_Q[f(\Gamma_\tau(z))],$$

其中 $\Gamma_\tau(z)$ 是 $z_{-\tau}$ 和 z_τ 之间的轨线弧. 若 $z\in F(\tau)$，则 $z_\tau\in F$，$z_{-\tau}\in F$. 故由引理 8.7，

(27) $$\int_{-\tau}^{\tau}\varphi(z_t)dt\geqslant l_Q(\Gamma_\tau(z))-2M(\bar{F})=2\tau-2M(\bar{F}).$$

因此从 (25)（取 $E\cap B_0=F(\tau)$，$\varphi(z)=f_Q(z)$），(26) 和 (27) 式得出

$$\iint_{B_0}f_Q(z)|Q|d\Omega\geqslant\left(1-\frac{M(\bar{F})}{\tau}\right)(A_Q(B_0)-2\varepsilon).$$

先令 $\tau\to+\infty$，再令 $\varepsilon\to0$，即得

$$\iint_{B_0}(f_Q(z)-1)|Q|d\Omega\geqslant0,$$

由于 $B\backslash B_0$ 具有零测度，故引理 8.8 的结论即由等式

$$A_Q(f(B))-A_Q(B)=$$
$$\iint_B(f_Q-1)^2|Q|d\Omega+2\iint_B(f_Q-1)|Q|d\Omega$$

推出.

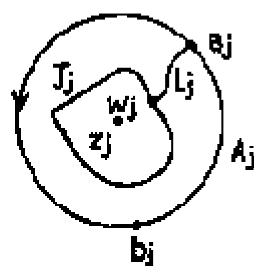


图 8.6

2. 现证明 Q 面积偏差的一个上界估计。

定理 8.10 对 $z_i\in\Pi_2$，设 $J_i\subset U_i$ 是充分接近 z_i 的一条分段解析若当曲线并且分隔 z_i 和 $\hat{\mathbb{C}}\backslash U_i$。设 G' 是 $G\backslash\bigcup J_i$ 的不含点 z_i 的分集。若 $\Delta(z)$ 由(2)式定义，则

$$A_Q(f(G'))-A_Q(G')+A_Q(\hat{\mathbb{C}}\backslash f(G))$$
$$=-\sum_{z_i\in\Pi_2}\left(\operatorname{Im}\int_{J_i}\overline{\Delta(z)}\sqrt{Q(z)}\,dz+\frac{1}{2i}\int_{J_i}\overline{\Delta(z)}\,\Delta'(z)dz\right),$$

其中 J_i 的取向使 G' 位于其右。

证 设 $z_i\in\Pi_2$，且设 $A_i\subset U_i\subset G$ 是以 z_i 为心的正向圆周；假定 J_i 位于 A_i 的内部。设 H_i 是 J_i 和 A_i 之间的二连通区域，L_i 是从 $a_i\in A_i$ 到 $w_i\in J_i$ 的 H_i 的横截线，$H_i'=H_i\backslash L_i$（见图 8.6）。

我们去掉下标 i 并在 H' 中选取 $\sqrt{Q(z)}$ 的一个分支。对固定的 $b\in A\backslash\{a\}$，定义

$$\varphi(z)=\int_b^z\sqrt{Q(\zeta)}\,d\zeta\quad(z\in H',\zeta\in H'),\tag{28}$$

经连续开拓至 L_i 的左边和右边，就得到 L 上的两个函数 $\varphi_+(z)$ 和 $\varphi_-(z)$，且满足关系式

$$\varphi_-(z)=\sigma\varphi_+(z)+c\quad(c\in\mathbb{C}),\tag{29}$$

其中 σ 的值当 z_i 是偶数阶极点时为 1，当 z_i 是奇数阶极点时为 -1。

解析的格林公式（1.1 节）表明

$$\begin{aligned}2i\iint_{H'}|Q(z)|d\Omega&=2i\iint_{H'}|\varphi'(z)|^2d\Omega\\&=\left(\int_A-\int_J\right)\bar\varphi d\varphi+\int_L\bar\varphi_-d\varphi_--\int_L\bar\varphi_+d\varphi_+\\&=\left(\int_A-\int_J\right)\bar\varphi d\varphi+\sigma\bar c(\varphi_-(w)-\varphi_+(a)).\end{aligned}\tag{30}$$

若 J 与 z_i 充分邻近，则 $J^*=f(J)$ 也位于 A 的内部，以 H^* 表示 J^* 与 A 之间的区域。按 8.4 节的记号，我们选取 H^* 中从 a 到

$w^* = f(w)$ 的横截线 L^* 在 $V_j \backslash \{z_j\}$ 内同伦于 $L + C_w$. 则对每个 $z \in J$, 曲线 C_z 同伦于先在 H' 内连接 z 和 b 再在 $H^{*\prime} = H^* \backslash L^*$ 内连接 b 和 $f(z)$ 所得的曲线. 若置

$$(31) \qquad \varphi^*(z) = \int_b^z \sqrt{Q(\zeta)}\, d\zeta \quad (z \in H^{*\prime}, \zeta \in H^{*\prime}),$$

则有

$$(32) \quad \Delta(z) = \int_{C_z} \sqrt{Q(\zeta)}\, d\zeta = \varphi^*(f(z)) - \varphi(z) \qquad (z \in J).$$

L^* 上的极限 $\varphi_\pm^*(z)$ 对同样的 σ 和 c 也满足 (29) 式. 因此当把 H', J, L, φ 代之以 $H^{*\prime}$, J^*, L^*, φ^* 时 (30) 式成立. 若从这一新方程减去 (30) 式, 即得

$$(33) \quad 2i\iint_{H^{*\prime}} |Q|\, dQ - 2i\iint_{H'} |Q|\, dQ$$
$$= -\int_J {*\bar\varphi^*} d\varphi^* + \int_J \bar\varphi d\varphi + \sigma\bar c[\varphi_+^*(w^*) - \varphi_+(w)].$$

进而由 (32) 式推出

$$(34) \quad \int_{J^*} \bar\varphi^* d\varphi^* = \int_J (\bar\varphi + \bar\Delta) d(\varphi + \Delta)$$
$$= \int_J (\bar\varphi d\varphi + \bar\Delta d\Delta) + \int_J d(\bar\varphi\Delta) + \int_J (\bar\Delta d\varphi - \Delta d\bar\varphi).$$

从 (32) 式和 (29) 式及关于 $\varphi_\pm^*$ 的相应关系推知

$$\int_J d(\bar\varphi\Delta) = \sigma\bar c(\varphi_+^*(w^*) - \varphi_+(w)).$$

因此, (33), (34) 和 (28) 式意味着

$$(35) \quad A_Q(H_j^*) - A_Q(H_j) = -\operatorname{Im}\int_{J_j} \bar\Delta\sqrt{Q}\, dz - \frac{1}{2i}\int_{J_j} \bar\Delta\Delta' dz;$$

我们已重新引入下标 j 且在面积积分中已删去割线 L_j 和 L_j^*. 由 8.4 节中的约定 (iv), $\sqrt{Q}$ 和 Δ 的分支选取是无关紧要的.

最后, 可记 $G' = (G \cap B) \cup \bigcup_j H_j$, 其中 B 是圆周 A_j 外部的区域. 则

$$f(G') \cup \hat{C} \backslash f(G) = B \cup \bigcup H_j^*.$$

因为 $A_Q(G\cap B)=A_Q(B)$，所以定理 8.10 的结论可从 (35) 式经求和推出。

3. 最后我们综合上下界的估计，得到与恒等式 (4.4.33) 有关但具有更一般性质的估计。仍作本节开头所述的假定并采用记号 (1) 和 (2)。

定理 8.11 对 $z_i\in\Omega_2$，设 $J_i\subset U_i$ 是充分接近 z_i 的逐段解析若当曲线，它分隔 z_i 和 $\hat{\mathbb{C}}\backslash U_i$。设 G' 是 $G\backslash\bigcup J_i$ 的不含 z_i 的分集。则

$$(36)\quad \sum_{z_i\in\Omega_2}\left(\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{J_i}\Delta(z)\sqrt{Q(z)}\,dz-\frac{1}{4\pi i}\int_{J_i}\overline{\Delta(z)}\,\Delta'(z)dz\right)$$
$$\geqslant\frac{1}{2\pi}\iint_G(f_Q(z)-1)^2|Q(z)|d\Omega+\frac{1}{2\pi}A_Q(\hat{\mathbb{C}}\backslash f(G)),$$

其中 J_i 的取向使 G' 位于其右。

证 由定理 8.9 和 8.10 推知

$$(37)\quad A_Q(\hat{\mathbb{C}}\backslash f(G'))+\iint_{G'}(f_Q-1)^2|Q|d\Omega+\sum_i\frac{1}{2i}\int_{J_i}\bar{\Delta}\Delta'dz$$
$$\leqslant\sum_i\operatorname{Im}\int_{J_i}(2\operatorname{Re}\Delta-\Delta)\sqrt{Q}\,dz=\sum_i\operatorname{Re}\frac{1}{i}\int_{J_i}\Delta\sqrt{Q}\,dz.$$

这一不等式等价于 (36) 式。但是关于曲线 J_i 有一限制，因为定理 8.9 的估计只是对某些特殊的曲线证明的，现在把这种曲线记为 J_i'。设 (37′) 是把 J_i 代之以 J_i' 的 (37) 式。

设 J_i 位于 J_i' 的内部。若 R_i 是 J_i 和 J_i' 之间的二连通区域，则由解析的格林公式及 (2) 式和 (1) 式，有

$$(38)\quad \frac{1}{2i}\int_{J_i'}\bar{\Delta}\Delta'dz-\frac{1}{2i}\int_{J_i}\bar{\Delta}\Delta'dz=\iint_{R_i}|\Delta'(z)|^2d\Omega$$
$$-\iint_{R_i}\left|\sqrt{Q(f(z))}\,f'(z)-\sqrt{Q(z)}\right|^2d\Omega$$
$$\geqslant\iint_{R_i}(f_Q(z)-1)^2|Q(z)|d\Omega.$$

由柯西积分定理，在 (37′) 的右端 J_i' 可代之以 J_i。故由 (37′) 和 (38) 式推出 (37) 式。

注 定理 8.9 和 8.11 即使在 $H_2=\varnothing$ 的情形也是非平凡的。

8.6 一般系数定理

1. 设函数 $q(z)$ 在 z_0 的某个邻域内亚纯；我们先引进一些本身与二次微分无关的定义。设

$$(1)\quad q(z)=\begin{cases}\dfrac{A_0}{(z-z_0)^n}+\cdots+\dfrac{A_\nu}{(z-z_0)^{n-\nu}}+\cdots & 若\ z_0\neq\infty,\\ A_0z^n+\cdots+A_\nu z^{n-\nu}+\cdots & 若\ z_0=\infty.\end{cases}$$

首先考虑 $n\geqslant 3$（若 $z_0\neq\infty$）或 $n\geqslant -1$（若 $z_0=\infty$）的情形，并令

$$(2)\quad m=\left[\frac{n+1}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & 若\ n\ 是偶数,\\ \dfrac{n+1}{2} & 若\ n\ 是奇数.\end{cases}$$

我们说 $f(z)$ 在 z_0 关于 $q(z)$ 满足*珍肯斯规范*，如果

$$(3)\quad f(z)=\begin{cases}z+a_m(z-z_0)^m+a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots & 若\ z_0\neq\infty,\\ z+a_mz^{-m}+a_{m+1}z^{-m-1}+\cdots & 若\ z_0=\infty.\end{cases}$$

若 $z_0\neq\infty$，我们定义

$$(4)\quad \rho(f,q,z_0)=\begin{cases}A_0a_{2m-2}+\cdots+A_{m-2}a_m & (n=2m-1),\\ A_0a_{2m-1}+\cdots+A_{m-1}a_m-\dfrac{m}{2}A_0a_m^2 & (n=2m);\end{cases}$$

若 $z_0=\infty$，定义

$$(5)\quad \rho(f,q,\infty)=\begin{cases}-A_0a_{2m}-\cdots-A_ma_m & (n=2m-1),\\ -A_0a_{2m+1}-\cdots-A_{m+1}a_m-\dfrac{m}{2}A_0a_m^2 & (n=2m).\end{cases}$$

由留数定理推知

$$(6)\quad \rho(f,q,z_j)=\frac{1}{2\pi i}\int(f(z)-z)q(z)dz-\frac{m}{2}(f(z)-z)'q(z)\Big|_{z=z_j},$$

其中积分路径环绕 z_j 使 z_j 位于其左。

我们证明珍肯斯规范在联系到二次微分而引起的那些变换下是不变的：

引理 8.9 设 $z=\phi(w)$ 是 w_0 邻域到 $z_0=\phi(w_0)$ 邻域的共形映照．令

(7) $q^*(w)=q(\phi(w))\phi'(w)^2,\quad f^*(w)=\phi^{-1}(f(\phi(w)))$.

若 $f(z)$ 满足珍肯斯规范，则 $f^*(w)$ 亦然，且有

(8) $$\rho(f,q,z_0)=\rho(f^*,q^*,w_0).$$

证 不妨设 $w_0=0$，则最一般的映照 $\phi(w)$ 可表成下列形式的映照之复合：

(i) $z_0\neq\infty,\ w_0=0,\ \phi(w)=w+z_0$,

(ii) $z_0=\infty,\ w_0=0,\ \phi(w)=\dfrac{1}{w}$,

(iii) $z_0=w_0=0,\ \phi(w)=\lambda w+\lambda_2 w^2+\cdots(\lambda_1\neq 0)$

第一种情形是平凡的；第二种情形容易经计算验证．故仅限于考虑情形 (iii)．记 $z=\phi(w)$，$\varphi(z)=\phi^{-1}(z)$．由泰勒公式和珍肯斯规范 (3) 推出

(9) $$f^*(w)-w=\varphi(f(z))-\varphi(z)$$
$$=(f(z)-z)\varphi'(z)+O(z^{2m})=a_m\lambda_1^{m-1}w^m+O(w^{m+1}).$$

故 $f^*(w)$ 满足珍肯斯规范．因为

$$q^*(w)=A_0\lambda_1^{-n+1}w^{-n}+\cdots$$

由 (9) 式推知当 $n=2m$，则

(10) $$a_m^{*2}A_0^*=a_m^2A_0.$$

而且，由 (9) 式和 (7) 式，因 $n\leqslant 2m$ 而有

$$(f^*(w)-w)q^*(w)$$
$$=(f(z)-z)\varphi'(z)q(\phi(w))\phi'(w)^2+O(z^{2m})O\left(\frac{1}{z^n}\right)$$
$$=(f(z)-z)q(z)/\varphi'(z)+O(1)$$

左边沿着一个小圆周积分且作代换 $w=\varphi(z)$，即得

(11) $$\int(f^*(w)-w)q^*(w)dw=\int(f(z)-z)q(z)dz.$$

于是从(6)式和(10)式推出(8)式.

现在来考虑(1)式中 $n=2$(若 $z_0\neq\infty$)或 $n=-2$(若 $z_0=\infty$)的情形. 假设

$$(12)\qquad f(z)=\begin{cases}az+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots & 若\ z_0\neq\infty,\\ az+a_0+a_1z^{-1}+\cdots & 若\ z_0=\infty,\end{cases}$$

其中 $a\neq 0$. 对每点 z, 设 C_z 是从 z 到 $f(z)$ 的一条曲线使得当 $z\to z_0$ 时 $C_z\to z_0$ 并且函数

$$(13)\quad g(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_{C_z}\frac{d\zeta}{\zeta-z_0}=\log\frac{f(z)-z_0}{z-z_0} & 若\ z_0\neq\infty,\\ \displaystyle-\int_{C_z}\frac{d\zeta}{\zeta}=-\log\frac{f(z)}{z} & 若\ z_0=\infty,\end{cases}$$

在 z_0 邻近解析. 于是对某个确定的对数分支有 $g(z_0)=\log a$(或 $-\log a$). 定义

$$(14)\qquad \rho(f,g,z_0)=A_0g(z_0).$$

一般来说,从上下文知我们所考虑的曲线 C_z 是什么,故在(14)中不予指明也不致引起误解.

下述引理的证明是直接的,与引理 8.9 的证明类似.

引理 8.10 设 z_0 是一个二阶极点. 在引理 8.9 的同样假设下再设 $C_w^*=\psi^{-1}(C_{\psi(w)})$, 我们有

$$(15)\qquad \rho(f,q,z_0)=\rho(f^*,q^*,w_0).$$

2. 现在我们可以来证明珍肯斯的一般系数定理了.

定理 8.12 设 $Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbf{C}}$ 上的二次微分, G 是一个容许开集. 设 $f(z)$ 是 G 的单叶容许函数且具有到恒等映照的容许同伦. 若 $f(z)$ 在所有阶数不小于 3 的极点处满足珍肯斯规范,则

$$(16)\qquad \sum_{z_j\in D}\operatorname{Re}\rho(f,Q,z_j)\geq 0$$

其中 $\rho(f,Q,z_j)$ 由(4),(5)及(14)式定义. 若等号成立则 $\hat{\mathbf{C}}\setminus f(G)$ 的勒贝格测度为 0, 且在 G 的每一分集,

$$(17)\qquad \frac{Q(f(z))}{Q(z)}f'(z)^2=e^{i\alpha}\qquad(\alpha\in\mathbf{R}).$$

(如问题 2 中所指出，我们常有 $e^{i\alpha}=1$)。

证 我们从定理 8.11 的估计式出发，把该式写作

(18) $$\sum_{z_j\in\Pi_1}\mathrm{Re}I(J_j)\geqslant\frac{1}{2\pi}\iint_{G'}(f_Q-1)^2|Q|\,d\Omega+\frac{1}{2\pi}A_Q(\hat{\mathbf{C}}\setminus f(G)),$$

其中已置

(19) $$I(J)=\frac{1}{2\pi i}\int_J\Delta(z)\sqrt{Q(z)}\,dz-\frac{1}{4\pi i}\int_J\overline{\Delta(z)}\Delta'(z)dz.$$

为计算这些积分，我们利用从一个阶数不小于 2 的固定极点 z_j 的邻域到 $w=0$ 邻域的共形映照

(20) $$w=\varphi(z),\quad z=\phi(w).$$

把二次微分化成法式(见 8.2 节)，再定义

(21) $$Q^*(w)=Q(\phi(w))\phi'(w)^2,\ f^*(w)=\varphi(f(\phi(w)))$$

及 $C_w^*=\phi^{-1}(C_{\phi(w)})$。则由 (8.5.2) 式有

(22) $$\Delta^*(w)=\int_{C_w^*}\sqrt{Q^*(w)}\,dw=\Delta(\phi(w)).$$

对于充分小的 $r>0$，选取正向圆周 $\{|w|=r\}$ 在 $z=\phi(w)$ 下的象 $J_j(r)$ 作为 J_j，则由 (19)，(21) 和 (22) 式推出

(23) $$I(J_j(r))=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\Delta^*(w)\sqrt{Q^*(w)}\,dw-\frac{1}{4\pi i}\int_{|w|=r}\overline{Q^*(w)}Q^{*\prime}(w)dw.$$

我们分三种情况讨论之：

(i) 设 z_j 是 Qdz^2 的二阶极点。由定理 8.1，它的法式是

$$Q^*(w)=c^2w^{-2}\quad(c^2=A_0)$$

故由 (22) 和 (13) 式

$$\Delta^*(w)=\int_{C_w^*}\frac{c}{w}\,dw=cq^*(w).$$

因这一函数在 0 点解析，由 (23) 式推出

(24) $$I(J_j(r))=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{c^2}{w}g^*(w)dw-\frac{1}{4\pi i}\int_{|w|=r}\overline{\Delta^*}\Delta^{*\prime}dw$$
$$\to\rho(f^*,Q^*,0)=\rho(f,Q,z_j)\quad(r\to0).$$

最后一步系根据引理 8.10 而得到。

(ii) 设 z_i 是 $2m-1$ 阶极点 $(m \geq 2)$，则它的法式为

$$Q^*(w) = w^{-2m+1}. \tag{25}$$

故由 (22) 式可得

$$\Delta^*(w) = \int_{C_w^*} \omega^{-m+\frac{1}{2}} d\omega = \frac{w^{-m+\frac{3}{2}}}{-m+\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{f^*(w)}{w} \right)^{-m+\frac{3}{2}} - 1 \right];$$

由 8.4 节条件 (iii*)，根的选取应使得对于 $w=0$ 方括号内取零值，因此由引理 8.9 有

$$\begin{aligned} \Delta^*(w) &= w^{-m+\frac{3}{2}}[a_m^* w^{m-1} + \cdots + a_{2m-2}^* w^{2m-3} + \cdots] \\ &= a_m^* w^{\frac{1}{2}} + \cdots, \end{aligned} \tag{26}$$

于是 (23) 式的第二个积分当 $r \to 0$ 时趋于 0. 若不作珍肯斯规范，就不能估计这个积分。由 (25) 与 (26) 式，(23) 式的第一个积分是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} w^{-2m+2}(a_m^* w^{m-1} + \cdots + a_{2m-1}^* w^{2m-3} + \cdots) dw = a_{2m-1}^*$$

由于 (25) 式对 $n \geq 1$ 有 $a_n^* = 0$，故由 (4) 式及引理 8.9 推出

$$\lim_{r \to 0} I(J_i(r)) = \rho(f^*, Q^*, 0) = \rho(f, Q, z_i). \tag{27}$$

(iii) 设 z_i 是 $2m$ 阶极点 $(m \geq 2)$. 由定理 8.1，其法式为

$$Q^*(w) = \left(\frac{1}{w^m} + \frac{c}{w} \right)^2 = \frac{1}{w^{2m}} + \frac{2c}{w^{m+1}} + \frac{c^2}{w^2}. \tag{28}$$

因而由 (22) 式有

$$\begin{aligned} \Delta^*(w) &= \int_{C_w^*} \left(\frac{1}{\omega^m} + \frac{c}{\omega} \right) d\omega \\ &= \frac{w^{1-m}}{1-m} \left[\left(\frac{f^*(w)}{w} \right)^{-m+1} - 1 \right] + c \log \frac{f^*(w)}{w}. \end{aligned}$$

于是由引理 8.9 及 8.4 节的条件 (iii*) 得到

$$\begin{aligned} \Delta^*(w) = w^{1-m} \Big[& a_m^* w^{m-1} + \cdots + a_{2m-2}^* w^{2m-3} \\ & + \left(a_{2m-1}^* - \frac{m}{2} a_m^{*2} \right) w^{2m-2} + \cdots \Big] + c a_m^* w^{m-1}. \end{aligned} \tag{29}$$

又由于这一函数在 0 点解析，知 (23) 式的第二个积分当 $r\to 0$ 时趋于 0.

从 (28) 和 (29) 式，(23) 式的第一个积分等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r_i}\left(\frac{1}{w^m}+\frac{c}{w}\right)\left[a_m^*+\cdots+\left(a_{2m-1}^*-\frac{m}{2}a_m^{*2}+ca_m^*\right)w^{m-1}+\cdots\right]dw=a_{2m-1}^*-\frac{m}{2}a_m^{*2}+2ca_m^*.$$

故由 (28) 式知引理 8.9 推出

$$\lim_{r\to 0}I(J_i(r))=\rho(f^*,Q^*,0)=\rho(f,Q,z_i). \tag{30}$$

因为当 $r\to 0$ 时 $G\setminus\bigcup J_i(r)$ 的分集 $G'(r)$ 趋于 G，分别由 (18) 式与 (24)，(27)，(30) 式推出

$$\sum_{z_i\in R_r}\mathrm{Re}\,\rho(f,Q,z_i)\geqslant\frac{1}{2\pi}\iint_G(f_Q-1)^2|Q|dQ+\frac{A_Q(\hat{\mathbf{C}}\setminus f(G))}{2\pi}, \tag{31}$$

再由积分的非负性，便推出 (16) 式.

最后，若 (16) 式等号成立则 (31) 式右端的项必为零. 由 (8.5.1) 式推出

$$\left|\frac{Q(f(z))}{Q(z)}f'(z)^2\right|=f_Q(z)^2=1\quad(z\in G).$$

该式蕴含 (17) 式. 这就完成了一般系数定理的证明.

3. 现在我们较详细地讨论一下等式的情形.

定理 8.13 在一般系数定理的假设条件下，设 (16) 式等号成立，并设 G_0 是 G 的一个分集. 那么，

(a) 若 G_0 包含有 Qdz^2 的一个阶数不小于 3 的奇数阶极点，则 $f(z)=z\ (z\in G_0)$.

(b) 若 G_0 包含一个阶数 $2m\geqslant 4$ 的偶数阶极点 z_0，则

$$\rho(f,Q,z_0)=\pm\sqrt{A_2}\,a_mc\qquad c=\operatorname*{res}_{z_0}\sqrt{Q(z)} \tag{32}$$

其中用了记号 (1)—(5). 若 $a_m=0$，则 $f(z)=z\ (z\in G_0)$.

(c) 若 G_0 包含一个二阶极点 z_0，则

$$\varphi(f(z))=a\varphi(z)\quad(a=f'(z_0)) \tag{33}$$

其中 $w=\varphi(z)$ 把 $Q(z)dz^2$ 变换为法式 $c^2w^{-2}dw^2$。

证 在各个点 $z_0\in\Pi_2$ 径共形映照 $w=\varphi(z)$ $(0=\varphi(z_0))$ 把 $Q(z)dz^2$ 化成法式。于是 $Q^*(\varphi(z))\varphi'(z)^2=Q(z)$。若记 $f^*(w)=\varphi(f(\varphi^{-1}(w)))$，由 (17) 式推出

$$(34)\qquad \frac{Q^*(f^*(w))}{Q^*(w)}f^{*\prime}(w)^2=\frac{Q(f(z))}{Q(z)}f'(z)^2=e^{i\alpha}.$$

(a) 设 z_0 的阶数 n 为奇数，则 $Q^*(w)=w^{-n}$。由 8.4 节条件 (iii)，$f^*(w)=w+a_\nu^*w^\nu+\cdots$，故由 (34) 式有

$$e^{i\alpha}=\left(\frac{w}{f^*(w)}\right)^nf^{*\prime}(w)^2=1+(2\nu-n)a_\nu^*w^{\nu-1}+\cdots.$$

因 n 是奇数而推知 $a_\nu^*=0$。故 $f^*(w)=w$，因此在 G_0 内 $f(z)=z$。

(b) 设 z_0 是 $2m\geqslant4$ 阶极点，则由 (2) 式及珍肯斯规范 (3)，有

$$(35)\qquad Q^*(w)=(w^{-m}+cw^{-1})^2,\quad f^*(w)=w+a_m^*w^m+\cdots.$$

故由 (34) 式有

$$(f^*(w)^{-m}+cf^*(w)^{-1})f^{*\prime}(w)=e^{i\frac{\alpha}{2}}(w^{-m}+cw^{-1}).$$

这就推出 $e^{i\frac{\alpha}{2}}=1$，因而经积分得到

$$(36)\qquad f^*(w)^{1-m}-w^{1-m}+(1-m)c\log\frac{f^*(w)}{w}=-b=\text{const}.$$

若置

$$\left(\frac{f^*(w)}{w}\right)^{1-m}=1-w^{1-m}\varphi(w),$$

(37)

$$f^*(w)=w(1-w^{m-1}\varphi(w))^{\frac{1}{1-m}}.$$

则由 (36) 式得出

$$(38)\qquad \varphi(w)+c\log\frac{1}{1-w^{m-1}\varphi(w)}=b.$$

应用隐函数定理然后比较系数，我们推知对每个 b，(38) 式有唯一的解 $\varphi_b(w)$，$\varphi_b(0)=b$ 满足

$$\varphi_b(w) = b(1 - cw^{m-1} + b_2w^{2(m-1)} + \cdots),$$

其中 b_k ($k = 2, 3, \cdots$) 是关于 b 和 c 的多项式. 由 (35) 与 (36) 式有 $b = (m-1)a_m^*$. 于是从 (37) 式得到

$$f^*(w) = w + a_m^* w^m + \left(\frac{m}{2} a_m^{*2} - c a_m^*\right) w^{2m-1} + \cdots.$$

若 $a_m^* = 0$, 则 $f^*(w) = w$. 从 (4) 式经简单计算得到 $\rho(f^*, Q^*, 0) = ca_m^*$. 由于留数保持不变, 故从 (10) 式推出 (32) 式.

(c) 最后设 z_0 是二阶极点. 则 $Q^*(w) = c^2 w^{-2}$. 因而由 (34) 式有

$$f^{*\prime}(w) f^*(w)^{-1} = c i^{\frac{\alpha}{2}} w^{-1}. \tag{39}$$

因由 8.4 节条件 (i) 有 $f^*(0) = 0$, 故 $f^*(w) = aw + \cdots (a \neq 0)$. 于是由 (39) 式推出 $c i^{\frac{\alpha}{2}} = 1$, 因而经积分得到

$$\log \frac{f^*(w)}{w} = \log a.$$

它等价于 (33) 式.

例 8.2 二次微分 $z^2 dz^2$ 在 ∞ 有一个 6 阶极点. 区域 $G = \hat{\mathbb{C}} \backslash [-1, +1]$ 是容许的, 并且函数

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = z\sqrt{1 - z^{-2}} = z - \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{8} z^{-3} + \cdots$$ [1]

在 G 内单叶且具有到恒等映照的一个容许同伦. 由 (3) 式, 它满足珍肯斯规范. 因由 (32) 式 $\rho(f, Q, \infty) = 0$ 而知 (16) 式在 $f(z) \not\equiv z$ 时等号也可能成立.

定理 8.13 可通过考虑整体轨线结构而得到推广 (见 Jenkins 1960c). 下面的问题 1 给出一个简单例子.

问　　题

1. 设 (16) 式中等号成立, 且每个 $z_j \in \Pi_2$ 是一个属于 G 的圆域的中心. 求证对每个 $z_j \in \Pi_2$, $|f'(z_j)| = 1$.

---

1) 原文右端第三项系数为 $+3/8$. ——译者注

2. 求证：在定理 8.9 和 8.11 中，等式

$$\iint(l_Q-1)^2|Q|d\Omega=\iint(\sqrt{|F|}-1)^2|Q|d\Omega,\ F(z)=\frac{Q(f(z))}{Q(z)}f'(z)^2$$

可代之以

$$\iint[(|\mathrm{Re}\sqrt{F(z)}|-1)^2+(\mathrm{Im}\sqrt{F(z)})^2]|Q|d\Omega,$$

并推证在 (16) 式中等号成立时 $F(z)\equiv 1\ (z\in C)$（为证明这一结论，首先注意到定理 8.4 中 $l_Q(C)=\int_C|\sqrt{Q}\,dz|$ 代之以 $\int_C|\mathrm{Re}[\sqrt{Q}\,dz]|$ 时结论仍成立，然后重复定理 8.9 的证明即可）。

8.7 对于极值问题的应用

1. 首先改写一般系数定理使之便于应用到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的开子集中的单叶函数. 顺便指出，与前面几节相反的是，下列变换不能再施行于任意黎曼面.

我们作如下假设：$Q(z)dz^2$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 上一个二次微分，w_j 为其阶数不小于 2 的极点. 函数 $f_0(z)$ 与 $f(z)$ 在开集 H 内单叶，且 $G_0=f_0(H)$ 是容许集，$G=f(H)$ 不含 $Q(z)dz^2$ 的单极点. 而且

(1) $\qquad f_0(z_j)=f(z_j)=w_j\quad(w_j\in\Pi_2)$,

存在 $H\times[0,1]$ 内连续函数 $f(z,t)$，使得

(2) $\qquad C_z: f(z,t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\quad(z\in H)$

是从 $f_0(z)$ 到 $f(z)$ 的一条曲线且满足

(3) $\qquad C_z\subset\hat{\mathbb{C}}\backslash\Pi_1\quad(z\neq z_j),\ C_{z_j}=\{w_j\}.$

对于 $w_j\in\Pi_2$ 及对于 z_j 邻近的 z，我们定义：

$$(4)\quad g_j(z)=\begin{cases}\log\dfrac{f(z)-w_j}{f_0(z)-w_j}=\displaystyle\int_{C_z}\frac{d\omega}{\omega-w_j} & 若\ w_j\neq\infty,\\[2ex] -\log\dfrac{f(z)}{f_0(z)}=-\displaystyle\int_{C_z}\frac{d\omega}{\omega} & 若\ w_j=\infty;\end{cases}$$

若 w_j 的阶数不小于 3，则 $g_j(z_j)=0$，特别有 $f_0'(z_j)=f'(z_j)$. 最后，如果 $\infty\in\Pi_2$，为了方便我们假定

(5) $\qquad f_0(\infty)=f(\infty)=\infty.$

这些条件推广了 8.4 节的条件 (i*)—(iii*)，因此可以论及

$f(z)$ 到 $f_0(z)$ 关于 $Q(w)dw^2$ 的容许同伦. 令

(6) $$f^*(w)=f(f_0^{-1}(w))\quad(w\in G_1),$$

(7) $$b_j(z)=z+\frac{f(z)-f_0(z)}{f_0'(z_j)},\ q_j(z)=Q(f_0(z))f_0'(z)f_0'(z_j),$$

(8) $$\tilde{Q}(z)dz^2=Q(f_0(z))f_0'(z)^2dz^2.$$

容易看出 $f^*(w)$ 是关于 $Q(w)dw^2$ 的容许函数并具有由曲线 $\tilde{C}_w=C_{f_0^{-1}(w)}$ 所确定的一个到恒等映照的容许同伦.

定理 8.14 假定满足上述假设条件. 如果 $b_j(z)$ 关于 $q_j(z)$ 满足珍肯斯规范,则

(9) $$\Sigma'\mathrm{Re}A_0^{(j)}g_j(z_j)+\Sigma''\mathrm{Re}\rho(b_j,q_j,z_j)\geqslant 0,$$

其中第一个和式就

$$Q(w)=A_0^{(j)}(w-w_j)^{-2}+\cdots\quad(w_j\neq\infty),$$

$$Q(w)=A_0^{(j)}w^2+\cdots^{1)}\quad(w_j=\infty)$$

取遍所有二阶极点;第二个和式取遍所有阶数不小于 3 的极点.若等号成立,则在 H 的每个如下所述的分集内 $f_0(z)=f(z)$:该分集包含 $\tilde{Q}dz^2$ 的一个极点 z_j,该极点的阶数 $n_j\geqslant 2$ 并且具有下列三性质之一:(a) z_j 是奇数;(b) $n_j\geqslant 4$ 是偶数且对 $z=z_j$[2],$(f(z)-f_0(z))^2Q(f_0(z))$ 为零;(c) $n_j=2$ 且 $f_0'(z_j)=f'(z_j)$[3].

证 应用定理 8.12 和 8.13 于 $f^*(w)$ 和 $Q(w)dw^2$. 在一个二阶极点的情形容易看出

$$\rho(f^*,Q,w_j)=A_0^{(j)}g_j(z_j).$$

设 z_j 是一个阶数不小于 3 的极点. 从引理 8.9 推知 $f^*=f\circ f_0^{-1}$ 在 w_j 关于 Qdw^2 满足珍肯斯规范当且仅当 $\tilde{f}=f_0^{-1}\circ f=f_0^{-1}\circ(f\circ f_0^{-1})\circ f_0$ 在 z_j 关于 $\tilde{Q}dz^2$ 满足珍肯斯规范,而且

$$\rho(f^*,Q,w_j)=\rho(\tilde{f},\tilde{Q},z_j).$$

由 (4) 式有 $f_0'(z_j)=f'(z_j)$,故当 $z\to z_j$,有

---

1) 原文误为 $Q(w)=A_0^{(j)}w^{-2}+\cdots$. ——译者注

2) 原文误为 $z=z_0$. ——译者注

3) 原文误为 $f_0'(z_j)=f_0'(z_j)$. ——译者注

$$\tilde{f}(z)=\begin{cases}z+O(|z-z_i|^2) & \text{若 } z_i\neq\infty,\\ z+O(1) & \text{若 } z_i=\infty.\end{cases}$$

由此分别推出

(10) $$\frac{f(z)-f_0(z)}{f_0'(z)}=\frac{f_0(\tilde{f}(z))-f_0(z)}{f_0'(z)}$$
$$=\begin{cases}\tilde{f}(z)-z+O(|\tilde{f}(z)-z|^2),\\ \tilde{f}(z)-z+O\left(\dfrac{|\tilde{f}(z)-z|^2}{|z|^3}\right).\end{cases}$$

因此关于 $\tilde{Q}(z)$ 的珍肯斯规范为 $\tilde{f}(z)$ 所满足当且仅当为 $z+(f(z)-f_0(z))/f_0'(z)$ 所满足，故当且仅当为 $h_i(z)$ 所满足。最后我们由 (8.6.6) 式经简单计算得到

$$\rho(h_i,q_i,z_i)=\rho\left(z+\frac{f-f_0}{f_0'},\tilde{Q},z_i\right)$$
$$=\rho(\tilde{f},\tilde{Q},z_i)=\rho(f^*,Q,w_i).$$

这个定理由于其隐式特征在应用上较为困难。(9) 式左端是关于 f 的系数的一个泛函，于 $f=f_0$ 达到其最小值 0. 一般地说，这一泛函包含有依赖于极值函数的参数。因此只有在一些简单的情况下一个给定的极值问题才能单用本定理解决。

2. 我们转向(定理 8.14 形式的)一般系数定理的应用。首先证明戈鲁辛 (1938) 的一个结果，该结果蕴含 $|a_3|\leqslant 2$ (对照 3.3 节问题 3).

定理 8.15 对 $k=1,2,\cdots$，设

(11) $$f(z)=z+a_{k+1}z^{k+1}+a_{k+2}z^{k+2}+\cdots\quad(|z|<1)$$

属于 S，则

(12) $$|a_n|\leqslant\frac{2}{n-1}\qquad(k+1\leqslant n\leqslant 2k).$$

证 可假定 $a_n=-|a_n|$. 考虑

(13) $$Q(w)dw^2=w^{-n-1}dw^2,$$

则函数

$$f_0(z)=z(1+z^{n-1})^{-\frac{2}{n-1}}=z-\frac{2}{n-1}z^n+\cdots$$

在D内单叶，且 $f_0(D)$ 是容许集．因 $\frac{n+2}{2}\leqslant k+1$，故满足珍肯斯规范．因此从(9)式推出

$$-|a_n|+\frac{2}{n-1}=\mathrm{Re}\left[a_n+\frac{2}{n-1}\right]\geqslant 0$$

珍肯斯(1960b)还证明了一个与这一结果类似的更深刻的结果．

定理 8.16 对 $k=0,1,\cdots$，设

(14) $\quad f(z)=z+b_{k+1}z^{-(k+1)}+b_{k+2}z^{-(k+2)}+\cdots\quad(|z|>1)$

属于Σ．则

(15) $$|b_n|\leqslant\frac{2}{n+1}\qquad(k+1\leqslant n\leqslant 2k+2).$$

特别对一切 $f\in\Sigma$ 有 $|b_1|\leqslant 1$ 及 $|b_2|\leqslant\frac{2}{3}$．而且若 $f(z)\neq 0(|z|>1)$ 则 $|b_0|\leqslant 2$．

证 可假定 $b_n=-|b_n|$，考虑

(16) $$Q(w)dw^2=w^{n-1}dw^2.$$

函数

(17) $$f_0(z)=z(1+z^{-(n+1)})^{\frac{2}{n+1}}=z+\frac{2}{n+1}z^{-n}+\cdots$$

把Δ映照成一个容许区域．因 $n\leqslant 2k+2$（见(8.6.3)式)故满足珍肯斯规范，并且(9)式表明 $-|b_n|+\frac{2}{n+1}\geqslant 0$．这就证明了(15)式，又因可以假定 $b_0=0$，故对 $k=0$ 推出 $|b_1|\leqslant 1$，$|b_2|\leqslant\frac{2}{3}$．

为证明最后一个结论，可在(16)和(17)式中取 $n=0$．这时 $w^{-1}dw^2$ 在0点有一个单极点．因已设 $f(z)\neq 0$，故可应用定理8.14．

下一个结果属于伍格尔(Rengel 1933)，它偏重于对几何性质的刻划并包含了寇贝1/4定理．

定理 8.17 设 $n=1,2,\cdots$，$f(z)=a_1z+\cdots$ 在 D 内单叶并且

$$w_\nu=4^{-\frac{1}{n}}e^{\frac{2\pi i\nu}{n}}\notin f(D)\quad(\nu=1,\cdots,n), \tag{18}$$

则 $|a_1|\leqslant 1$.

证 二次微分

$$Q(w)dw^2=\frac{dw^2}{w^2\left(w^n-\frac{1}{4}\right)} \tag{19}$$

在 0 点有一个二阶极点并且以 n 个点 (18) 为其单极点. 函数

$$f_0(z)=z(1+z^n)^{-\frac{2}{n}} \tag{20}$$

把 D 映照成沿着射线 $\{w_\nu t: 1\leqslant t<+\infty\}$ $(\nu=1,2,\cdots,n)$ 切开的平面. 因此 $f_0(D)$ 是容许集，且由 (18) 式可以应用定理 8.14. 我们得到

$$-4\log|a_1|=-4\log\left|\frac{f'(0)}{f_0'(0)}\right|\geqslant 0,$$

并且若 $|a_1|=1$，则 $f=f_0$.

3. 在上述应用问题中我们能够容易地推测出极值函数与二次微分. 但对于较困难的极值问题情况就不是这样了. 此时极值函数满足一个谢非尔微分方程(见 7.3 节与例 8.1). 这表明极值区域 $f_0(D)$ 是关于某个二次微分的容许集，然而这二次微分要依赖于未知的极值函数 f_0. 应用定理 8.14 于某个比较函数 f，常可得到 f_0 与 f 的系数间一个新的关系式. 作为例子我们来证明格拉贝定与谢非尔 (1955b) 的一个估计式，该估计式我们曾在 4.4 节中由格拉贝定-谢非尔不等式导出过.

定理 8.18 若 $g(z)=z+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots\in\Sigma$，则

$$|b_3|\leqslant\frac{1}{2}+e^{-6}. \tag{21}$$

证 关于 Σ 中 $\mathrm{Re}\,b_3$ 的最小值问题，其谢非尔微分方程为

$$z^2g'(z)^2(b_1-g(z)^2)=-z^4+b_1z^2-2b_2z+4b_3-2\bar{b}_2z^{-1}+\bar{b}_1z^{-2}-z^{-4}, \tag{22}$$

其中右端当 $|z|=1$ 非正并且具有零点。因此，$g(\Delta)$ 是关于二次微分

(23) $$Q(w)dw^2=(b_1-w^2)dw^2$$

的容许集(对照例 4.6)，该二次微分在∞有一个 6 阶极点。可假定 $\mathrm{Re}\,b_1\geqslant 0$；否则以考虑 $-ig(iz)$ 来代替 $g(z)$。也可假定 $b_1\neq 0$，因若 $b_1=0$，从定理 8.16 推出 $|b_3|\leqslant\frac{1}{2}$。

设 $f(z)=z+a_1z^{-1}+\cdots\in\Sigma$，则满足珍肯斯规范，且因

$$Q(g(z))g'(z)=-z^2+O(z^{-1})\quad(z\to\infty)$$

从定理 8.14 得到

(24) $$\mathrm{Re}\left[(b_3-a_3)+\frac{1}{2}(b_1-a_1)^2\right]\geqslant 0,$$

若 $a_1=b_1$，则等号仅对于 $g=f$ 成立。

首先选取 $f(z)=-g(-z)$，则 $a_1=b_1$，$a_3=b_3$，故 (24) 式中等号成立。这推出 $g(z)=-g(-z)$ (对照推论 6.1)。其次选取 $f(z)=\overline{g(\bar{z})}$。因为容易知 $b_3<0$，我们有 $a_1=\bar{b}_1$，$a_3=b_3$，因此 $-(\mathrm{Im}\,b_1)^2\geqslant 0$，故 $b_1>0$，在 (24) 式内等号仍成立。又因 $a_1=b_1$，我们断定 $\overline{g(\bar{z})}=g(z)$。线段 $[-\sqrt{b_1},+\sqrt{b_1}]$ 是一条轨线，有另外两条轨线从 $\pm\sqrt{b_1}$ 出发，与该线段的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$。这推出 $\pm\sqrt{b_1}\in\partial g(\Delta)$，故由对称性推出 $g(1)=\sqrt{b_1}$。

因为 $\bar{b}_1=b_1$，$b_2=0$，从 (22) 式推出

(25) $$z^2g'(z)^2(b_1-g(z)^2)=-\left(z^2-\frac{b_1}{2}+z^{-2}\right)^2+2+\frac{1}{4}b_1^2+4b_3.$$

而在 $|z|=1$ 上 $z^2-\frac{b_1}{2}+z^{-2}$ 是实数且有零点。由于 (25) 式当 $|z|=1$ 时非正且有零点，我们推出

(26) $$2+\frac{1}{4}b_1^2+4b_3=0.$$

积分(25)式，我们推知 $w=g(z)$ 满足

$$\frac{w}{2}\sqrt{w^2-b_1}-\frac{b_1}{2}\log\left(w+\sqrt{w^2-b_1}\right)$$
$$=\frac{z^2}{2}-\frac{b_1}{2}\log z-\frac{z^{-2}}{2}-\frac{b_1}{4}\log b_1$$

其中积分常数是由 $g(1)=\sqrt{b_1}$ 确定。把 $\frac{b_1}{2}\log z$ 移到另一边，代入 $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$ 并比较系数，我们得到

$$\left(\frac{3}{2}-\log 2\right)b_1=-\frac{1}{2}b_1\log b_1,$$

故 $b_1=4e^{-3}$。因此 (26) 式表明对于我们的极值函数有

$$-b_3=\frac{1}{2}+e^{-6}.$$

如果我们试图将这一程序施行于高次项系数，碰到的困难是极值函数和比较函数不再满足珍肯斯规范。不过通过考虑带有能保证珍肯斯规范的边界条件的极值问题能够得到部分结果。例如，前 k 个系数是实数就是一个这样的条件(见 Jenkins 1960b, Obrock 1966, Schiffer 1967)。奥布洛克 (Obrock 1971) 曾证明了一个与一般系数定理中相类似的不等式而避开了珍肯斯规范，但该不等式更复杂更不明显。

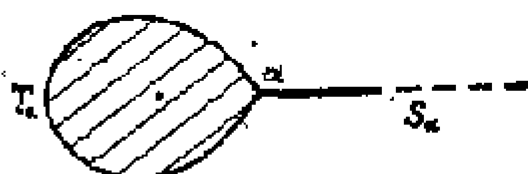


图 8.7

4. 在下一个应用 (Jenkins 127 页)中，容许集不再是连通集。我们研究在 4.1 节中讨论过的情形。

定理 8.19 设 $f(z)=a_1z+\cdots$ 在 D 内单叶，而 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在 Δ 内单叶。设

$$f(D)\cap g(\Delta)=\varnothing.$$

若 $|a_1|\leqslant 64\pi^{-2}e^{-2}\approx 0.877$ 则

(27) $$|b_0| \leqslant 2 - \frac{1}{4} e^3 |a_1|,$$

并且这一界限是精确的.

证 考虑二次微分

(28) $$Q(w)dw^2 = \frac{w-\alpha}{w^2} dw^2 \qquad (\alpha > 0).$$

它在 0 点有一个二阶极点,在∞有一个三阶极点,在 α 有一个单零点. 因为 $\alpha > 0$,在 0 点邻近的所有轨线都是封闭的(8.2 节的情形(d)),0 点是一个圆域的中心(见 8.3 节). 作为唯一的一个有限临界点 α 必位于该圆域的边界上,故推知除轨线 $S_\alpha = (\alpha, +\infty)$ 外存在一条过单零点 α 的闭轨线 T_α(见图 8.7).

积分 (28) 式得到

(29) $$\begin{aligned} w^* &= \int_\alpha^w \frac{\sqrt{\omega-\alpha}}{\omega} d\omega + \pi\sqrt{\alpha} \\ &= 2\sqrt{w-\alpha} - i\sqrt{\alpha} \log \frac{\sqrt{\alpha} - i\sqrt{w-\alpha}}{\sqrt{\alpha} + i\sqrt{w-\alpha}} \\ &\quad + \pi\sqrt{\alpha} \\ &= 2\sqrt{w} + \frac{\alpha}{\sqrt{w}} + O\left(\frac{1}{w}\right) \quad (w \to \infty) \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Im}\sqrt{w-\alpha} > 0$. 沿 S_α 切开的 T_α 之外部区域被映照成 $\{\operatorname{Im} w^* > 0\}$ 而 T_α 被映照成 $(-\pi\sqrt{\alpha}, \pi\sqrt{\alpha})$. 而且由函数

(30) $$z^* = 2\sqrt{z} + \frac{2}{\sqrt{z}} \quad (\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0)$$

把 $\Delta \backslash (1, +\infty)$ 映照成 $\{\operatorname{Im} z^* > 0\}$,把 $\partial\Delta$ 映成 $[-4, 4]$. 若

(31) $$0 < \alpha \leqslant 16\pi^{-2},$$

则 $\pi\sqrt{\alpha} \leqslant 4$,故知求解 $w^*(w) = z^*(z)$ 可得到单叶函数 $g_\alpha(z)$,它把 Δ 映照成沿着 S_α 的某线段切开的 T_α 之外部区域. 由 (29) 与 (30) 式我们有

(32) $$g_\alpha(z) = z + (2-\alpha) + \cdots$$

故 $g_\alpha \in \Sigma$.

设 $w = f_\alpha(z)$ 把D映照成 T_α 的内部区域，使得 $f_\alpha(0) = 0$，$f_\alpha(1) = \alpha$. 因该区域是圆域，我们有

$$-\frac{\alpha}{z^2}dz^2 = -\frac{\alpha - w}{w^2}dw^2.$$

类似于(29)式，我们求得

$$(33)\qquad i\sqrt{\alpha}\log z = 2i\sqrt{\alpha - w} - i\sqrt{\alpha}\log\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha - w}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha - w}}$$

$$(0 < |z| < 1);$$

积分常数由 $f_\alpha(1) = \alpha$ 所确定。我们推出

$$(34)\qquad f_\alpha(z) = 4e^{-2}\alpha z + O(z^2)\quad (z \to 0).$$

应用定理 8.14 于函数

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in D) \\ g(z) & (z \in \Delta), \end{cases}\qquad F_\alpha(z) = \begin{cases} f_\alpha(z) & (z \in D) \\ g_\alpha(z) & (z \in \Delta), \end{cases}$$

因为 $f(D) \cap g(\Delta) = \varnothing$，函数 $F(z)$ 单叶. 我们得到

$$(35)\qquad \operatorname{Re}\left[-(b_0 - 2 + \alpha) - \alpha\log\frac{|a_1|}{4e^{-2}\alpha}\right] \geqslant 0.$$

若取 $\alpha = \frac{1}{4}e^2|a_1|$，则满足(31)式，因为 $|a_1| \leqslant 64\pi^{-2}e^{-2}$；因而从(35)式推出 $\operatorname{Re} b_0 \leqslant 2 - \alpha$，并由此经常用的论证方法即可导出结论(27).

$64\pi^{-2}e^{-2} < |a_1| \leqslant 1$ 时对 b_0 的精确估计要涉及椭圆积分. 此外，在珍肯斯的书中还可以找到许多进一步的应用.

一般系数定理也可应用于多连通区域. 我们只给出一个经典的例子.

设 $H \subset \hat{\mathbb{C}}$ 是一个有限连通区域，$0, \infty \in H$. 设 $\Sigma^0(H)$ 是H中的单叶函数类，对该类函数有

$$(36)\qquad f(0) = 0,\ f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots\ (\text{在 } z = \infty).$$

存在两个函数 $f_1, f_2 \in \Sigma^0(H)$，使得

$\complement f_1(H)$ 由过 0 点的直线上的线段组成，

$\mathbb{C}\setminus f_2(H)$ 由以 0 点为圆心的圆弧组成。

它们可以成为极值问题

$$(37)\qquad |f_1'(0)| = \min\{|f'(0)|: f\in \Sigma^0(H)\},$$

$$(38)\qquad |f_2'(0)| = \max\{|f'(0)|: f\in \Sigma^0(H)\}$$

的解(见 Golusin 185 页)。$f_1(H)$ 是关于二次微分 $w^{-2}dw^2$ 的容许集，而 $f_2(H)$ 是关于二次微分 $-w^{-2}dw^2$ 的容许集。因此定理 8.14 表明 f_1 和 f_2 分别是 (37) 式和 (38) 式的唯一解。容许同伦的存在将可由 8.4 节问题 4 推知。

问　　题

1. 考虑函数 $f_0(z) = z(1+z)^{-2}$ 与 $\alpha f(z)/f(r)$ 以及二次微分

$$Q(w)dw^2 = \frac{dw^2}{w^2(w-\alpha)},$$

其中 $\alpha = f_0(r)\ (-1<r<1)$，用以证明

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}\quad (f\in S,\ |z| = r<1).$$

2. 考虑 $w^{-2}(w-a)^{-2}dw^2$ 以证明

$$|f'(z)| \geqslant \frac{1-r^2}{r^2}|f(z)|^2\quad (f\in S,\ |z| = r<1).$$

3. 从谢菲尔微分方程 (7.3.23) 出发证明对于 $f\in S$ 有 $|a_3|\leqslant 3$。

4. 假定满足定理 8.19 的假设条件。试通过分别考虑 $-w^{-2}dw^2$ 和 $(w^2-\alpha^2)w^{-4}dw^2$ 来证明

$$|a_1|\leqslant 1,\ |b_1|\leqslant 1-\frac{\pi e}{8}|a_1|\quad 当\ |a_1|\leqslant\frac{8}{\pi e}.$$

5. 设 G 是有限连通区域，$\infty, -1, +1\in G$，它的余集由以 $+1$ 和 -1 为焦点的椭圆弧组成。求证若 $f(z) = az + a_0 + a_1z^{-1} + \cdots$ 在 G 内单叶，则

$$|f(1) - f(-1)| \leqslant 2|a|$$

等号只对于 $f(z) = az + a_0$ 成立。并证明若椭圆弧代之以双曲线弧则 $|f(1) - f(-1)| \geqslant 2|a|$ (Grötzsch 1932，见 Jenkins 78 页)。

第九章 边界性质

单叶函数边界性质理论的宗旨，是为了获得一个区域特别是它的边界的几何性质同映照函数的解析性质之间的理想的一一对应关系。在这一章中，我们讨论区域的拓扑性质同映照函数的连续性特征之间的关系。

素端理论给出了对于一般情形的完整的描述。我们将在正规函数理论的基础上叙述这一理论。这是一种迂回的方法。在教科书参考文献中可以找到许多出色的直接处理方法(例如参看 Collingwood-Lohwater 或 Ahlfors 的《共形不变量》一书)。我们选择这一方法，是因为不仅每一单叶函数都是正规函数，而且它的导函数也是正规函数；因此正规函数在下一章也要用到。本章的最后一节讨论边界性质与格隆斯基不等式和拟共形扩张之间的关系。

9.1 正规函数

1. 设 $f(z)$ 在 $D=\{|z|<1\}$ 内亚纯，其**球面导数**定义为

(1) $$f^{\#}(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

它是球面旋转下的不变量，即若

(2) $$g(z)=b\,\frac{f(z)-c}{1+\bar{c}f(z)}\ (c\in\mathbb{C});\quad g(z)=\frac{b}{f(z)}\ (c=\infty),$$

且 $|b|=1$，则 $g^{\#}(z)=f^{\#}(z)$。球面导数在球面度量中所起的作用，类似于普通导数在欧氏度量中的作用。

函数 $f(z)$ 被称为**正规的**，如果

(3) $$\alpha=\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)f^{\#}(z)<\infty.$$

这一概念是由莱ეტ和维尔台南引入的 (Lehto and Virtanen 1957)；

(也可参看 Noshiro 1938 与 Hayman 1955b).

引理 9.1 设 $\varphi(z)$ 在 D 内解析且 $|\varphi(z)|<1$. 若 $f(z)$ 在 D 内正规,则 $g(z)=f(\varphi(z))$ 也正规且满足

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)g^{\#}(z)\leqslant a, \tag{4}$$

当 $\varphi(z)$ 是 D 到自身的麦比乌斯变换时使等号成立.

证 我们有 $(1-|z|^2)|\varphi'(z)|\leqslant 1-|\varphi(z)|^2$,对于 D 到自身的麦比乌斯变换等号成立(Ahlfors 136 页),故

$$(1-|z|^2)g^{\#}(z)=\frac{(1-|z|^2)|\varphi'||f'(\varphi)|}{1+|f(\varphi)|^2}\leqslant(1-|\varphi|^2)f^{\#}(\varphi).$$

因此从 (3) 式便推出引理的结论.

马堤的正规性判定准则(Ahlfors 218 页)可叙述为: 一个亚纯函数族正规当且仅当其球面导数局部一致有界.

引理 9.2 函数 $f(z)$ 在 D 内正规当且仅当函数

$$g(z)=f(\varphi(z)),\ \varphi(z)=a\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\quad(|a|=1,|z_0|<1) \tag{5}$$

构成一个正规族.

这一事实解释了"正规"函数这个名称. 若由 (5) 式给出的族正规,取 $a=1$,则由马堤判定准则知

$$(1-|z_0|^2)f^{\#}(z_0)=g^{\#}(0)\quad(|z_0|<1)$$

有界,故函数 $f(z)$ 正规. 其逆可立即从引理 9.1 与马堤判定准则推出.

每个有界解析函数正规,因为

$$(1-|z|^2)f^{\#}(z)\leqslant(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant\sup_{|\zeta|<1}|f(\zeta)| \tag{6}$$

下面的结果说明了我们为什么要研究正规函数.

引理 9.3 若 $f(z)$ 在 D 内解析单叶,则 $f(z)$ 与 $f'(z)$ 皆正规.

证 把 $f(z)$ 表成 $ag(z)+b$ 的形式,$g\in S$. 则

$$\frac{(1-|z|^2)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}=\frac{|ag(z)|}{1+|ag(z)+b|^2}(1-|z|^2)\left|\frac{g'(z)}{g(z)}\right|,$$

且由定理 1.6 (1.2 节)该量当 $|z|\to 1-0$ 时保持有界. 而且由引理 1.3 (1.2 节)有

$$(7)\quad \frac{(1-|z|^2)|f''(z)|}{1+|f'(z)|^2} \leqslant \frac{1}{2}(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|$$
$$= \frac{1}{2}(1-|z|^2)\left|\frac{g''(z)}{g'(z)}\right| \leqslant 3.$$

故 $f'(z)$ 也正规.

2. 一个基本结果是正规函数的最大模原理(Lehto *and* Virtanen 1957).

定理 9.1 设 $f(z)$ 在 D 内亚纯且

$$(8)\quad \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)f^{\#}(z) \leqslant \alpha < \infty.$$

设 G 是区域, $\bar{G}\subset D$, 并且位于由 D 沿着一条圆弧 B 切开而成的一个角度为 $\beta(0<\beta<\pi)$ 的透镜状区域内. 假定对于 $z\in\partial G\backslash B$,

$$(9)\quad |f(z)| \leqslant \delta < \delta_0(\kappa) = \frac{1}{\kappa}(1+\sqrt{1+\kappa^2})\exp(-\sqrt{1+\kappa^2})$$

其中 $\kappa=\alpha\beta/\sin\beta$, 则 $f(z)$ 在 G 内无极点且对于 $z\in G$,

$$(10)\quad |f(z)| \leqslant \eta,$$

其中 $\eta=\eta(\delta,\alpha,\beta)$ 是方程

$$(11)\quad \delta = \eta\exp\left[-\frac{\kappa}{2}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\right]$$

是最小正根.

在 $z\in\partial G\cap B$ 时关于 $|f(z)|$ 我们未作任何假设这一点而言, 这个定理是经典的最大模原理的推广. 另一方面, 定理 9.1 是远非线性的: 只是当着在 $\partial G\backslash B$ 上 $|f(z)|$ 与 $\frac{1}{\alpha}$ 相比相当小时, 我们才能得到某种估计.

函数 $t\exp\left[-\frac{\kappa}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]$ 对于 $0<t<t_0$ 递增且对于 $t_0<t<\infty$ 递减, 此处 $t_0=\kappa^{-1}(1+\sqrt{1+\kappa^2})$. 因为在 t_0 它的值为 $\delta_0(\kappa)$, 故推出对于 $0\leqslant\delta<\delta_0(\kappa)$, (11) 式有一个唯一解 η 满足 $0\leqslant\eta<t_0$.

证 (a) 以 $f(\varphi(z))$ 代替 $f(z)$, 其中 $\varphi(z)$ 是 D 到 D 的一个

适当的麦比乌斯变换，我们可以假定 B 是一条过 -1 和 $+1$ 的圆弧，由引理 9.1 在这样一个变换下数 α 保持不变。对 $0<\beta'<\beta$，设 G' 是 G 与沿着过 ±1 的圆弧 B' 切开的角度为 β' 的区域的交（见图 9.1）。

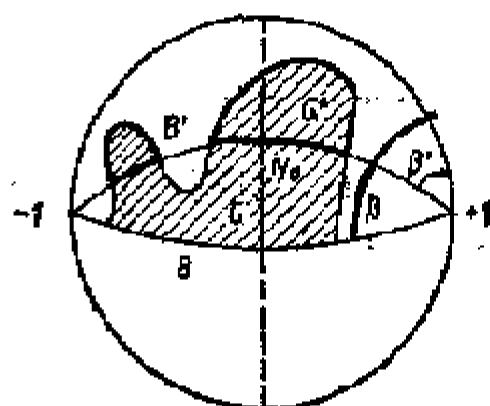


图 9.1

假定 (10) 式不成立，因由 (9) 式和 (11) 式，我们有 $|f(z)|\leqslant \delta<\eta$ $(z\in\partial G\backslash B)$，又因 $\bar{G}\subset D$，故存在 β' 使得对于 $z\in G'$ 有 $|f(z)|\leqslant\eta$。特别在 G' 内 $f(z)$ 无极点。设 β' 是这种数的最大者 $(0<\beta'<\beta)$，则对于某个 $z_0\in B'\backslash\partial G$ 有

(12) $$\eta=\sup_{z\in G'}|f(z)|=|f(z_0)|.$$

经适当的麦比乌斯变换，我们可以假定 $z_0=iy_0$，$-1<y_0<1$，其中

(13) $$y_0=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta'}{2}\right).$$

(b) 记 $b=\dfrac{1}{\beta'}\log\dfrac{\eta}{\delta}\ (>0)$ 并考虑

(14) $$g(z)=f(z)\exp\left[\frac{b}{i}\log\frac{1+z}{1-z}-\frac{\pi b}{2}\right]\quad(z\in G').$$

由于当 $z\in B'$ 时 $\arg[(1+z)/(1-z)]=\dfrac{\pi}{2}-\beta'$，从 (12) 式推出

$$\max_{z\in B'\cap\partial G'}|g(z)|\leqslant\eta\exp(-b\beta')=\delta.$$

又因 $\partial G'\backslash B'\subset\partial G\backslash B$，由 (9) 式和 (14) 式得到

$$\sup_{z\in\partial G'\backslash B'}|g(z)|\leqslant\sup_{z\in\partial G'\backslash B'}|f(z)|\leqslant\delta.$$

因此，最大模原理表明对于 $z\in G'$ 有 $|g(z)|\leqslant\delta$，并且由 (14) 式我们得到

$$\log|f(iy)|\leqslant\log\delta+\frac{1}{2}\pi b-2b\tan^{-1}y\quad(iy\in G').$$

由于 $|f(iy_0)|=\eta$，于是从 (13) 式推出

$$\log|f(iy)|-\log|f(iy_0)|\leqslant-2b(\tan^{-1}y-\tan^{-1}y_0)$$
$$(iy\in G').$$

令 $y\to y_0+0$，我们得到

$$(15)\qquad \mathrm{Re}\left[i\frac{f'(iy_0)}{f(iy_0)}\right]\leqslant-\frac{2b}{1+y_0^2}=-\frac{2\log(\eta/\delta)}{\beta'(1+y_0^2)}.$$

另一方面，因 $|f(iy_0)|=\eta$，从 (8) 式和 (13) 式推出

$$(16)\quad\left|\frac{f'(iy_0)}{f(iy_0)}\right|=f^{\#}(iy_0)\frac{1+\eta^2}{\eta}\leqslant\frac{\alpha(1+\eta^2)}{(1-y_0^2)\eta}=\frac{\alpha(\eta+\eta^{-1})}{(1+y_0^2)\sin\beta'}.$$

因此 (15) 式蕴含

$$\delta\geqslant\eta\exp\left[-\frac{\kappa'}{2}\left(\eta+\frac{1}{\eta}\right)\right],\qquad\kappa'=\frac{\alpha\beta'}{\sin\beta'},$$

这与 (11) 式矛盾，因为 $\kappa'<\kappa$.

我们将定理 9.1 应用于正规函数的序列.

定理 9.2 设函数 $f_n(z)$ 在 D 内亚纯且

$$(17)\qquad \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)f_n^{\#}(z)\leqslant\alpha<\infty\quad(n=1,2,\cdots).$$

若存在若当曲线 $C_n\subset D$ 使得

$$(18)\qquad \operatorname{diam}C_n\geqslant r>0\quad(n=1,2,\cdots),$$

及

$$(19)\qquad \max_{z\in C_n}|f_n(z)|\to0\quad(n\to\infty),$$

则当 $n\to\infty$ 时，$f_n(z)$ 在 D 内局部一致趋于 0.

注: 这一定理可表成更一般的形式. 我们用假设条件

$$\operatorname{diam} f_n(C_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

代替(19)式. 设 $w_n \in f_n(C_n)$, 则球面旋转

$$g_n(z) = [f_n(z) - w_n]/[1 + \bar{w}_n f_n(z)]$$

满足(19)式. 因 $g_n^{\#}(z) = f_n^{\#}(z)$ 亦满足(17)式. 因此我们断定 $g_n(z) \to 0$, 并且推出序列 $(f_n(z))$ 的某个子列在 D 内局部一致地收敛于一个常数, 可能为 ∞.

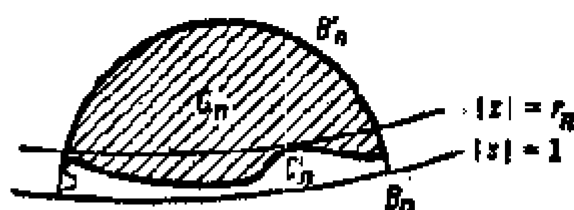


图 9.2

证 假定结论不成立. 由(17)式及马堤判定准则, 序列 (f_n) 是正规的. 因为可选用子序列, 故我们不妨假定对于某个函数 $f(z) \not\equiv 0$, 序列在 D 内局部一致地有

$$f_n(z) \to f(z) \quad 当\ n \to \infty\ 时. \tag{20}$$

首先考虑

$$r_n = \inf\{|z|;\ z \in C_n\} \to 1 \quad (n \to \infty) \tag{21}$$

的情形(见图 9.2). 由(18)式, 存在点 a_n, $b_n \in C_n$ 满足 $|a_n - b_n| = r_n$, 若 B_n 表示过 a_n 与 b_n 且正交于 ∂D 的圆, 则若 n 充分大, a_n 和 b_n 位于 $B_n^* = B_n \cap \{r_n \leqslant |z| \leqslant 1\}$ 的不同弧段上. 故可找到 C_n 的子弧 C'_n, 它与 B_n^* 的每段弧恰好相交一次. 由(21)式, B_n 在 C'_n 两端点间的子弧 B'_n 同 C'_n 没有其他交点.

如果 G_n 是若当曲线 $B'_n \cup C'_n$ 的内区域, 则 $\partial G_n = B'_n \cup C'_n \subset D$, 故 $\overline{G}_n \subset D$ (见 1.5 节). 因此从(17), (19)及定理 9.1 (取 $\beta = \frac{\pi}{2}$) 我们得到

$$\max_{z \in B'_n} |f_n(z)| \leqslant \max_{z \in \overline{G}_n} |f_n(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

因对于某个 $r < 1$ 与充分大的 n, B'_n 与 $\{|z| \leqslant r\}$ 相交. 故

从(20)式及恒等定理推出 $f(z)\equiv 0$，这是不对的。

再考虑(21)式不成立时的情形。对于某个 $r<1$ 和无限多个 n，C_n 与 $\{|z|\leqslant r\}$ 相交。故从(18)，(19)，(20)及恒等定理推出 $f(z)\equiv 0$，而这也是不对的。

若当弧 $C_n\subset D$ 的序列 (C_n) 称为关于亚纯函数 $f(z)$ 的**寇勃弧序列**，如果 $\operatorname{diam}C_n\geqslant r>0\ (n=1,2,\cdots)$ 并且对某个 $c\in\hat{\mathbb{C}}$ 及对于 $z\in C_n$ 有

$$f(z)\to c\quad n\to\infty.$$

假如这样的序列不存在，则说 $f(z)$ **没有寇勃弧**。

推论 9.1 非常数的正规函数没有寇勃弧。

伯盖米尔与赛得尔的这个结果(Bagemihl and Seidel 1961)可以从定理 9.2 当 $f_n(z)\equiv f(z)$ 时的情形推出。不妨设 $c=0$，因为正规性不受球面旋转(2)的影响。

说函数 $f(z)\ (z\in D)$ 在点 $\zeta\in\partial D$ 具有渐近值 $a\in\hat{\mathbb{C}}$，如果存在一条若当弧 Γ 以 ζ 为一个端点，其余各点均位于 D 内，并使得对于 $z\in\Gamma$ 有

$$f(z)\to a,\quad z\to\zeta.$$

我们称这样的一条弧为一条**渐近路径**。若 $\Gamma=\{\zeta r:0\leqslant r\leqslant 1\}$，我们则称 a 是一个**径向极限**。

推论 9.2 设 $f(z)$ 不为常数且在 D 内正规；设 $\Gamma:z(t),\ 0\leqslant t<1$ 是 D 内的一条半开若当弧，满足 $|z(t)|\to 1\ (t\to 1)$。若

$$f(z(t))\to a\quad 当\ t\to 1-0, \tag{22}$$

则对某个 $\zeta\in\partial D$ 有 $z(t)\to\zeta\ (t\to 1-0)$。故 Γ 是一条渐近路径。

证 显然当 $t\to 1-0$ 时在 ∂D 上 $z(t)$ 至少有一个极限点。假如有两个不同的极限点 $\zeta,\zeta'\in\partial D$，则可找到 Γ 的闭子弧 C_n，使得当 $n\to\infty$ 时 $\operatorname{diam}C_n\to|\zeta-\zeta'|\neq 0$。由(22)式，它们构成了一个寇勃弧序列，这与推论 9.1 矛盾。

一个(对称的)**施笃兹**(Stolz)**角**是如下形式的集合：

$$A = \left\{z \in D: |\arg(1-\bar{\zeta}z)| < \frac{\pi}{2} - \delta\right\} \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$$

即以 ζ 为顶点，关于 $[0,\zeta]$ 对称，角度小于 π 的扇形。如果对于 ζ 点的每个施笃兹角 A，当 $z \to \zeta$，$z \in A$ 时均有

$$f(z) \to a,$$

则说 $f(z)$ 在点 $\zeta \in \partial D$ 有**角极限** a。显然一个角极限也是一个径向极限，因而是一个渐近值。

现在来证明，对于正规函数，逆命题亦成立（Lehto and Virtanen 1957）。这便推出正规函数在任何一个给定点 $\zeta \in \partial D$ 至多有一个渐近值。

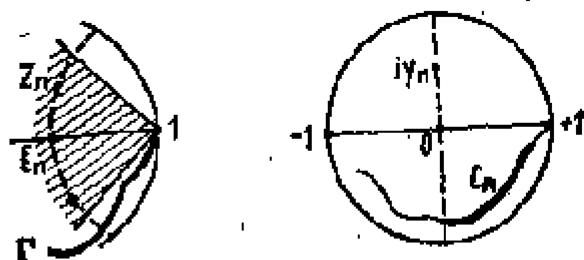


图 9.3

定理 9.3 若正规函数 $f(z)$ 在 ζ 具有渐近值 a，则 $f(z)$ 在 ζ 也具有角极限 a。

证 （图 9.3）可假定 $\zeta = 1$，$a = 0$。若 $z_n \to 1$，$z_n \in A$，我们则可找到实数序列 (ξ_n)，(y_n) 及 $r < 1$，使得

$$(23) \quad z_n = \varphi_n(iy_n), \ \varphi_n(s) = \frac{s + \xi_n}{1 + \xi_n s}, \ |y_n| \leqslant r, \ \xi_n \to 1 - 0.$$

若 n 充分大，渐近路径 Γ 的原象 $\varphi_n^{-1}(\Gamma)$ 与虚轴相交，故可找到 $D \cap \varphi_n^{-1}(\Gamma)$ 的子弧 C_n 使得 $\operatorname{diam} C_n \geqslant \frac{1}{2}$ 并且弧 $\varphi_n(C_n) \subset \Gamma$ 趋于点 1。于是

$$(24) \quad \max_{s \in C_n} |f(\varphi_n(s))| = \max_{z \in \varphi_n(C_n)} |f(z)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

应用定理 9.2 于函数 $g_n(s) = f(\varphi_n(s))$。因为由引理 9.1 有 $(1 - |s|^2)g_n^{\#}(s) \leqslant \alpha < \infty$ $(|s| < 1, n = 1, 2, \cdots)$ 故从 (24) 式我

们得到当 $n\to\infty$ 时在 $|z|\leqslant r$ 内一致地有 $g_n(z)\to 0$. 因此(23)式表明 $f(z_n)\to 0\,(n\to\infty)$.

例 9.1 函数 $f_1(z)=\exp[(1+z)/(1-z)]$ 在 D 内正规，这是因为 $|f_1(z)|>1$; 在每个施笃兹角内当 $z\to 1$ 时有 $f_1(z)\to\infty$. 然而如果不加限制地令 $z\to 1$, $z\in D$, 则 $|f_1(z)|\to\infty$ 并不成立，因为对 $\theta\neq 0$, $|f_1(e^{i\theta})|=1$.

函数 $f_2(z)=\exp[(1+i)/(1-z)]$ 在 D 内非正规，因为对于 $z\to 1$, $\arg(1-z)=\frac{\pi}{4}$, 有 $f_2(z)\to\infty$, 而对于 $z\to 1$, $\arg(1-z)=-\frac{\pi}{4}$, 有 $|f_2(z)|\to 1$.

3. *如果函数 $f(z)$ 在 D 内解析并且*

$$\alpha=\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|f'(z)|<\infty, \tag{25}$$

则称 $f(z)$ 为布洛赫(Bloch)函数.

由(3)式，每个布洛赫函数正规，并且可以验证 $\exp f(z)$ 也正规. 布洛赫函数这个名称可从它同布洛赫常数的密切关系得到说明(例如见 Landau 1929 或 Pommerenke 1970). 容易看出，每个有界函数是布洛赫函数.

定理 9.4 函数 $f(z)$ 是布洛赫函数当且仅当存在常数 c 和函数 $h\in S$, 使得

$$f(z)=c\log h'(z)+f(0)\quad(z\in D). \tag{26}$$

证 (a) 若 $f(z)$ 具有(26)式的形式，$h\in S$, 则由引理 1.3(1.2 节),

$$(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant|c|(1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant 6|c|\quad(z\in D),$$

故 $f(z)$ 是布洛赫函数.

(b) 反之，若 $f(z)$ 是布洛赫函数，我们考虑函数

$$h(z)=\int_0^z \exp\frac{f(\zeta)-f(0)}{\alpha}\,d\zeta=z+\cdots, \tag{27}$$

可知(26)式成立(取 $c=\alpha$),并且

$$(1-|z|^2)\left|\frac{h''(z)}{h'(z)}\right|=\frac{1}{\alpha}(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant 1 \quad (z\in D).$$

故由定理 6.7(6.3 节),有 $h\in S$.

因为每个布洛赫函数正规，故定理 9.3 表明渐近值与角极限等价。在布洛赫函数的情形，我们还可以证明一个结果 (Anderson, Clunie and Pommerenke 1974)，这结果在不存在渐近值时也能应用。

定理 9.5 设 $f(z)$ 是布洛赫函数且 $E\subset\mathbb{C}$. 若 Γ 是一条若当弧，两端伸向点 $\zeta\in\partial D$，弧上其余各点位于 D 内，且

(28) $$\limsup_{z\to\zeta,\ z\in\Gamma}\operatorname{dist}[f(z),E]<\infty,$$

则对于每个施笃兹角 Δ,

(29) $$\limsup_{z\to\zeta,\ z\in\Delta}\operatorname{dist}[f(z),E]<\infty.$$

选取 $E=\{|w|\leqslant r\}$ 或 $E=\mathbb{R}$,我们便知，当 z 沿某弧 Γ 趋于 ζ 时，如果 $|f(z)|$ 或 $\operatorname{Im}f(z)$ 保持有界，那末在每个施笃兹角内也保持有界. 这是麦克米伦 (McMillan) 的结果.

证 可假定 $\zeta=1$，设 (29) 式对某个施笃兹角 Δ 不成立。则存在 $z_n\in\Delta$ 有

(30) $$\operatorname{dist}[f(z_n),\ E]\to\infty,\quad z_n\to 1\quad (n\to\infty),$$

如定理 9.3 的证明中所作的那样，我们把 z_n 表成 (23) 式的形式并确定弧 $C_n\subset D\cap\varphi_n^{-1}(\Gamma)$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(C_n)\to 1$. 函数

(31) $$g_n(s)=[f(\varphi_n(s))-f(z_n)]^{-1}$$

在 D 内亚纯且由 (25) 式它满足

$$(1-|s|^2)g_n^{\#}(s)=\frac{(1-|\varphi_n|^2)|f'(\varphi_n)|}{1+|f(\varphi_n)-f(z_n)|^2}\leqslant\alpha\quad (s\in D).$$

从 (28) 和 (30) 式推出：对于 $s\in C_n$ 当 $n\to\infty$ 时 $g_n(s)\to 0$. 因此，由定理 9.2 当 $n\to\infty$ 时在 $|s|\leqslant r$ 内一致地有 $g_n(s)\to 0$. 这同由 (31) 和 (23) 式 $g_n(iy_n)=\infty$ 及 $|y_n|\leqslant r$ 的事实矛盾.

问　　题

1. 试证每个 D 内亚纯函数在 D 内正规。

2. 试证 $\exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}$ $(\alpha>1)$ 在 D 内非正规。

3. 证明 $f(z)$ 是布洛赫函数当且仅当

$$f(z)=f(0)+f'(0)z+c\log g'(z^{-1})\quad(c\in\mathbf{C},g\in\Sigma).$$

4. 证明 $f(z)$ 是布洛赫函数当且仅当对于某个常数 c 及某个解析函数 $h(z)$ 有 $f(z)=c\log h'(z)$，函数 $h(z)$ 在 D 内局部一致单叶(意指 $h(z)$ 在每一个具有固定的非欧半径 $\rho>0$ 且包含于 D 的圆盘内单叶)。

5. 证明布洛赫函数构成具有范数

$$\|f\|_{\mathscr{B}}=|f(0)|+\sup_{z\in D}(1-|z|^2)|f'(z)|$$

的巴拿赫空间 $\mathscr{B}$，并且

$$\|f\|_{\mathscr{B}}\leqslant 2\|f\|_{\infty},$$

其中 $\|f\|_{\infty}=\sup\{|f(z)|: z\in D\}$。

6. 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. 用关于多项式的伯恩斯坦不等式证明(对照 10.2 节例 10.1)：

$$\|f\|_{\mathscr{B}}\leqslant|f(0)|+8\sup_{1\leqslant k<\infty}\max_{|z|\leqslant 1}\left|\sum_{n=2^{k-1}}^{2^{k}-1}a_n z^n\right|.$$

9.2　素端与极限

1. 我们想要用一种共形不变的方式来紧化单连通区域 $G\subset\mathbf{C}$。我们很快就会明瞭，通常取闭包 $\overline{G}$ 的方法只是在 G 是若当区域的情形下才是一种合乎要求的紧化。由于我们感兴趣的是边界性质，不妨假定 $\infty\in G$，从而 ∂G 是一个有界集。下面阐述的所有结果显然均可经麦比乌斯变换推到一般情形。如果边界包含 ∞ 点，就需要使用球面度量。本节介绍的这方面的理论取之于卡拉皆屋多利 (Carathéodory 1913)，但我们作了某些修改。

设 G 是单连通区域，$\infty\in G$。G 的横截线 C 定义为 G 内的一条开若当弧，使得 $\overline{C}\setminus C$ 由 ∂G 上一个点或两个点组成。若 C 是 G

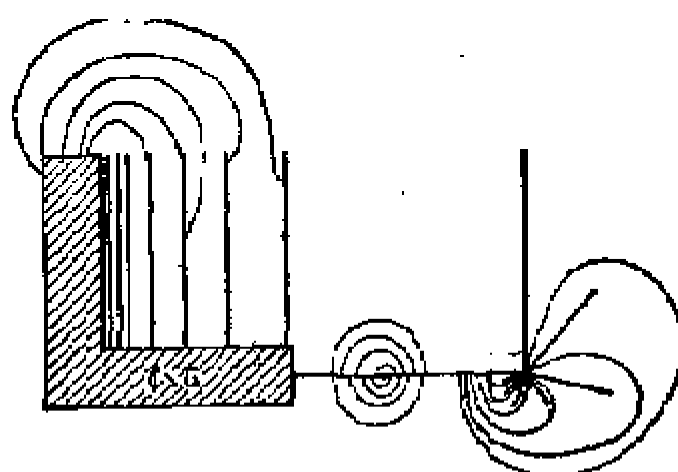


图 9.4 素端的例子

的一条横截线，$\infty\notin C$，则 $G\setminus C$ 恰有两个分集，其一为有界分集 $\operatorname{Int}C$，另一分集为 $\operatorname{Ext}C$，$\infty\in\operatorname{Ext}C$. 而且

$$G\cap\partial(\operatorname{Int}C)=G\cap\partial(\operatorname{Ext}C)=C.$$

为证明这些结论，我们考虑 G 到 D 的黎曼映照函数与 D 到 $\mathbb{C}$ 的拓扑映照 $z/(1-|z|)$ 的复合. 它确定了从 G 到 $\mathbb{C}$ 的一个同胚，并把横截线 C 映照成穿过∞的一条闭若当曲线. 故可由若当曲线定理(1.5 节)推出我们的结论.

G 的零链 (C_n) 定义为 G 的横截线序列，使得

(i) $\operatorname{Int}C_{n+1}\subset\operatorname{Int}C_n$ $(n=1,2,\cdots)$;

(ii) 对每个 n，C_n 与 C_{n+1} 关于 G 具有正的距离，即不存在连接 C_n 与 C_{n+1} 的曲线 $L_k\subset G$ 使得 $\operatorname{diam}L_k\to 0$ $(k\to\infty)$;

(iii) $\operatorname{diam}\ C_n\to 0$ $(n\to\infty)$.

如果 $\overline{C}_n\cap\overline{C}_{n+1}=\phi$，则第二条假设当然满足. 图 9.5 所示的三个横截线序列分别违反了条件 (i), (ii), (iii).

如果对每个 m 都存在相应的 n 使得

$$(1)\qquad \operatorname{Int}\ C'_n\subset\operatorname{Int}C_m,\ \operatorname{Int}C_n\subset\operatorname{Int}C'_m,$$

则称零链序列 (C_n) 与 (C'_n) 是等价的. 容易看出这就在 G 的所有零链的集合上建立了一个等价关系. 我们把这样确定的零链等价类称为 G 的素端(见图 9.4). G 的所有素端的集合称为 G 的卡拉皆屋多利边界(以下简称卡氏边界——译者).

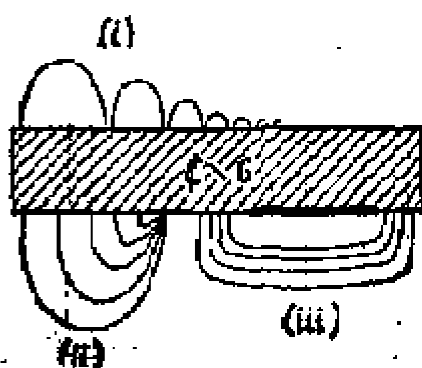


图 9.5

下面的卡拉皆屋多利定理 (1913) 是关于素端的基本定理，并且说明了上述相当复杂的定义的理论缘由.

定理 9.6 设 $g(z)$ 在 $\Delta=\{|z|>1\}$ 内单叶，$g(\infty)=\infty$. 则在 $G=g(\Delta)$ 的素端 P 与点 $\zeta\in\partial\Delta$ 之间存在具有如下性质的一一对应：若 (C_n) 是代表素端 P 的一个零链，则存在序列 (δ_n), (δ'_n), $0<\delta_n<\delta'_n\to 0$ $(n\to\infty)$，使得

(2) $$\{z\in\Delta:|z-\zeta|<\delta_n\}\subset\operatorname{Int}g^{-1}(C_n)\subset\{z\in\Delta:|z-\zeta|<\delta'_n\}.$$

设 $\hat{G}=G\cup\{$一切$P\}$，即 G 与其卡氏边界的并. 定义 P 在 G 内的邻域为 G 内这样一个开子集；当 n 充分大时它包含 Int C_n. 这一定义显然与代表 P 的零链 (C_n) 的选择无关. 集 $H\subset\hat{G}$ 被称为是开的，如果 $H\cap G$ 是开集并且对每个 $P\in H$，集 H 包含 P 在 G 内的一个邻域 U 以及所有那些以 U 为其在 G 内邻域的素端. 这就确定了 $\hat{G}$ 上的一个拓扑.

当 $z\in\Delta$ 时令 $\hat{g}(z)=g(z)$，当 $z\in\partial\Delta$ 时定义 $\hat{g}(z)$ 为对应于 z 的唯一的素端，则 $\hat{g}(z)$ 是 $\bar{\Delta}$ 到 $\hat{G}$ 的一个同胚. 因为 $\bar{\Delta}$(作为 $\hat{\mathbf{C}}$ 的子集)是紧的，故推出 $\hat{G}$ 是紧的.

2. 为了证明定理 9.6 以及接着的定理 9.7，我们需要两个引理：

引理 9.5 设 $g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在 Δ 内单叶，则对于 $1<\rho<2$ 及 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2\pi$，存在 θ, $\alpha<\theta<\beta$ 使得

(3) $$\int_1^\rho |g'(re^{i\theta})|dr < 8|b|\sqrt{\frac{\rho-1}{\beta-\alpha}}.$$

并且

(4) $$(|z|-1)|g'(z)| \to 0 \quad (|z| \to 1).$$

证 (a) 由薛瓦尔兹不等式，

(5) $$\int_\alpha^\beta \left(\int_1^\rho |g'(re^{i\theta})|dr\right)^2 d\theta \leqslant \int_\alpha^\beta (\rho-1)\int_1^\rho |g'(re^{i\theta})|^2 dr d\theta$$

$$< (\rho-1)\int_0^{2\pi}\int_1^2 |g'(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta$$

因 $g(z)$ 单叶，且由推论 1.3(1.2 节)对 $1<|z|\leqslant 2$ 有 $|g(z)-b_0|\leqslant 4|b|$，这就推出

$$(\beta-\alpha)\inf_{\alpha<\theta<\beta}\left(\int_1^\rho |g'(re^{i\theta})|dr\right)^2 < (\rho-1)\operatorname{area}\{g(z):$$
$$1<|z|<2\} < 16\pi|b|^2(\rho-1).$$

我们用紧集套序列借助于 θ 的一个显式构造即可以避免使用勒贝格理论。

(b) 薛瓦尔兹不等式表明对于 $m=1,2,\cdots$，

$$\left|\sum_{n=m}^\infty nb_n z^{-n-1}\right|^2 \leqslant \sum_{n=m}^\infty n|b_n|^2(|z|^2-1)^{-2};$$

由面积定理(1.2 节)级数 $\sum n|b_n|^2$ 收敛。故

$$(|z|-1)^2|g'(z)|^2 = (|z|-1)^2\left|b-\sum_{n=1}^{m-1} nb_n z^{-n-1}\right.$$

$$\left.-\sum_{n=m}^\infty nb_n z^{-n-1}\right|^2 \leqslant 2(|z|-1)^2\left(|b|+\sum_{n=1}^{m-1} n|b_n|\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=m}^\infty n|b_n|^2,$$

由于最后一个和式可经适当选取 m 而使其任意小，因而推出(4)式。

引理 9.6 设 $g(z)$ 在 Δ 内单叶，$g(\infty)=\infty$. 假定 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 且 $r_n \to 1+0(n\to\infty)$. 如果存在 θ_n，θ_n' 满足 $\theta_n\to\theta-0$，$\theta_n'\to$

$\theta+0$，使得对于 $n=1,2,\cdots$，有

(6) $Q_n=(e^{i\theta_n},r_ne^{i\theta_n})\cup\{r_ne^{it}:\theta_n\leqslant t\leqslant\theta_n'\}\cup(r_ne^{i\theta_n'},e^{i\theta_n'})$，

则 $g(Q_n)$是 $g(\Delta)$ 的横截线且满足 $\operatorname{diam} g(Q_n)\to 0(n\to\infty)$。

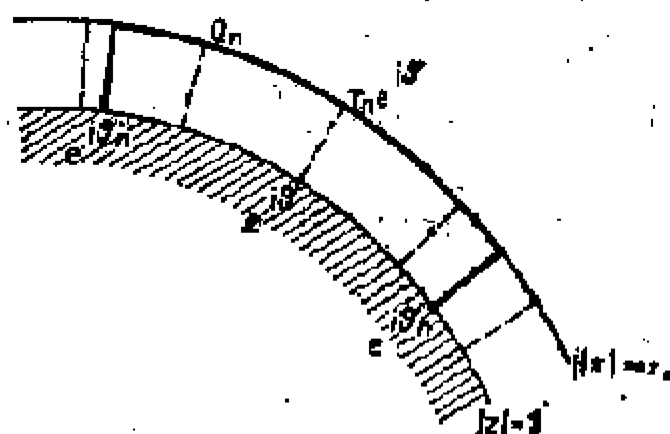


图 9.6

证 从 (4) 式得到

(7) $(r_n-1)\max|g'(r_ne^{it})|<\varepsilon_n^3,\ \varepsilon_n\to 0\quad(n\to\infty)$.

对 $\alpha=\theta-2\varepsilon_n^{-2}(r_n-1)$，$\beta=\theta-\varepsilon_n^{-2}(r_n-1)$ 应用引理 9.5，我们可找到 $\theta_n<\theta$，使得

$$\int_1^{r_n}|g'(re^{i\theta_n})|dr<8|b|\sqrt{\frac{r_n-1}{\varepsilon_n^{-2}(r_n-1)}}=8|b|\varepsilon_n.$$

类似地可找到 $\theta_n'>\theta$ (见图 9.6) 有同样结果，并且由 (7) 式，

$$\int_{\theta_n}^{\theta_n'}|g'(r_ne^{it})|dt\leqslant 4\varepsilon_n^{-2}(r_n-1)\frac{\varepsilon_n^3}{r_n-1}=4\varepsilon_n.$$

故 $g(Q_n)$ 的长度(从而其直径)不大于 $(16|b|+4r_n)\varepsilon_n$[1]，因而趋于 0，由于长度有限，$\overline{g(Q_n)}\setminus g(Q_n)$ 至多包含两个点，故 $g(Q_n)$ 是 G 的横截线。

定理 9.6 的证明 (a) 设 (C_n) 是零链，$B_n=g^{-1}(C_n)$，由引理 9.3，$1/g(z^{-1})$ (或 $1/[g(z^{-1})-c]$，$c\in G$)在 D 内正规。因 $\overline{C}_n\setminus C_n$ 由 ∂G 上一点或两点组成，故从推论 9.2 推出 $\overline{B}_n\setminus B_n$ 由 $\partial\Delta$ 上

---

1) 原文误为 $(16|b|+4)\varepsilon_n$。——译者注

一点或两点组成；因此 B_n 是 Δ 的横截线并且 $\mathrm{Int}B_n = g^{-1}(\mathrm{Int}C_n)$.

由于正规函数没有逗动弧(推论 9.1)，我们从条件 (iii) 推出 $\mathrm{diam}B_n \to 0$ 因而 $\mathrm{diam}(\mathrm{Int}\ B_n) \to 0$；顺便指出 $\mathrm{diam}(\mathrm{Int}C_n) \to 0$ 不一定成立. 因由条件 (i) $\mathrm{Int}B_{n+1} \subset \mathrm{Int}B_n$[1]，我们断定，交集 $\bigcap \overline{\mathrm{Int}\ B_n}$ 恰由一个点 $\zeta \in \partial\Delta$ 组成. 显然对于某个序列 (δ_n'), $\delta_n' \to 0$，(2) 式中的第二个包含关系成立.

例如 (2) 式中的第一个包含关系对于某个 n 及每个 $\delta_n > 0$ 都不成立，于是对于 $n+1$ 也不成立. 因 $\zeta \in \overline{\mathrm{Int}\ B_n}$，我们推出 ζ 的每一个邻域都包含 $B_n = \Delta \cap \partial(\mathrm{Int}B_n)$ 中的点. 由于集合 B_n 连通，当 ν 充分大时，B_n 必与引理 9.6 中所述的弧 Q_ν 相交；B_{n+1} 也如此. 又由于集合 $g(Q_\nu) \subset G$ 与 $C_n = g(B_n)$ 和 C_{n+1} 都相交，并且当 $\nu \to \infty$ 时有 $\mathrm{diam}g\ (Q_\nu) \to 0$，我们得到了与条件 (ii) 相矛盾的结果. 这就证明了 (2) 式.

(b) 设 P, P' 分别是零链 (C_n), (C_n') 所代表的域 G 的素端，设 ζ, ζ' 是 (a) 中所构造的 $\partial\Delta$ 上的点. 从 (2) 式推知 $\zeta = \zeta'$ 当且仅当 (C_n) 与 (C_n') 等价即 $P = P'$. 特别，我们知道 ζ 与代表零链的选取无关.

剩下的是要证明每点 $\zeta \in \partial\Delta$ 都对应于某个素端. 给定 $\zeta \in \partial\Delta$，我们可以找到序列 (r_n)，使得引理 9.6 中的横截线 Q_n 满足 $\mathrm{Int}Q_{n-1} \subset \mathrm{Int}Q_n$ 并且 $\mathrm{dist}(\overline{Q}_n, \overline{Q}_{n+1}) > 0$. 于是 $C_n = g(Q_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 定义了一个横截线序列满足条件 (i) 和 (iii). 假如条件 (ii) 不成立，则可找到连接 Q_n 与 Q_{n+1} 的弧 $A_k \subset \Delta$ 的序列满足 $\mathrm{diam}\ g(A_k) \nrightarrow 0$. 通过取子序列，我们可以假定对于 $z \in A_k$ 及某个 $a \in \mathbf{C}$，当 $k \to \infty$ 时有 $g(z) \to a$. 因 $\mathrm{diam}A_k \geqslant \mathrm{dist}(\overline{Q}_n, \overline{Q}_{n+1}) > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$，这是一个逗动弧序列，从而与推论 9.1 相矛盾. 于是 (C_n) 是零链，因而确定了一个素端 P. 又因 (2) 式成立而知 ζ 对应于 P.

3. 函数 $g(z)$ $(z \in \Delta)$ 在点 $\zeta \in \partial\Delta$ 上的(无约束)**聚值集** $C(g,$

1) 原文误为 $\mathrm{Int}\ B_{n+1} \subset B_n$. ——译者注

$\zeta)$ 定义为当 $z\in\Delta$, $z\to\zeta$ 时 $g(z)$ 的所有极限点的集合。径向聚值集 $C_{\rm rad}(g,\zeta)$ 是当 $r\to 1+0$ 时 $g(r\zeta)$ 的所有极限点的集. 聚值集是连通紧集；当且仅当极限存在时退化为一点，即

(8) $\quad C(g,\zeta)=\{a\}\Longleftrightarrow g(z)\to a$ 当 $z\to\zeta$, $z\in\Delta$,

(9) $\quad C_{\rm rad}(g,\zeta)=\{a\}\Longleftrightarrow g(r\zeta)\to a$ 当 $r\to 1+0$.

顺便指出，柯林伍德的极大性定理 (Collingwood-Lohwater 76 页)断言，若 $g(z)$ 是任何一个连续函数，则除去 ζ 的一个第一范畴集之外有 $C(g,\zeta)=C_{\rm rad}(g,\zeta)$.

对单叶函数的两类聚值集，我们将给出一个几何特征 (Lindelöf 1915). 设 P 是 G 的一个素端，(C_n) 是代表 P 的一个零链. 则由条件 (i)，$\phi\neq {\rm Int}\,C_{n+1}\subset{\rm Int}\,C_n$. 故集合

$$I(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{{\rm Int}\,C_n} \tag{10}$$

作为这种集的集合套序列的交是一个非空的连通紧集，并且从(1)式我们推知 $I(P)$ 与代表零链的选取无关. 我们称 $I(P)$ 为 P 的**迹**.

如果存在代表素端 P 的零链 (C_n) 使得当 $n\to\infty$ 时 $C_n\to\{a\}$，则称点 $a\in\mathbf{C}$ 为素端 P 的**主点**. 以 $\Pi(P)$ 表示素端 P 的所有主点的集合，显然 $\Pi(P)\subset I(P)$.

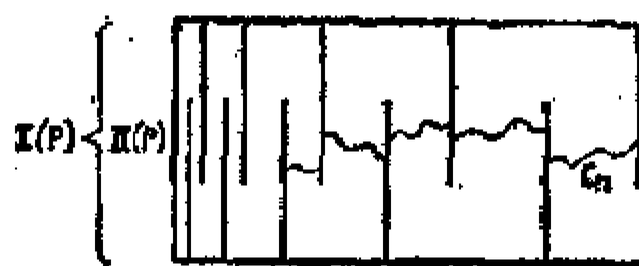


图 9.7

图 9.4 所示的每个素端只有一个主点；左边素端的迹是着重线. 在图 9.7 中，$\Pi(P)$ 与 $I(P)$ 是不同的线段；但作一点容易想到的改变就可使 $\Pi(P)=I(P)$.

定理 9.7 设 $g(z)$ 在 Δ 内单叶且 $g(\infty)=\infty$. 若 $g(\Delta)$ 的素

端P对应于点$\zeta\in\partial\Delta$，则

$$C(g,\zeta)=I(P),\quad C_{rad}(g,\zeta)=\Pi(P).$$

证 (a) 设(C_n)是代表素端P的零链．若$a\in C(g,\zeta)$，则由定义存在$z_k\to\zeta$使得当$k\to\infty$时$g(z_k)\to a$．从(2)式左边的包含关系，我们得出对于每个n和充分大的k有$g(z_k)\in \operatorname{Int}C_n$．故定义(10)表明$a\in I(P)$．

反之，若$a\in I(P)$，则可找到点$z_n'\in \operatorname{Int}g^{-1}(C_n)$使得当$n\to\infty$时$g(z_n')\to a$．而(2)式右边的包含关系表明$z_n'\to\zeta$．故$a\in C(g,\zeta)$．

(b) 若$a\in C_{rad}(g,\zeta)$，则由定义存在$r_n\to 1+0$使得当$n\to\infty$时$g(r_n\zeta)\to a$．引理9.6中的横截线$g(Q_n)$包含$g(r_n\zeta)$，因而收敛于$\{a\}$．这是因为当$n\to\infty$时有$\operatorname{diam} g(Q_n)\to 0$．我们可选取$(g(Q_n))$的子序列使其成为零链，故$a\in\Pi(P)$．

反之，设$a\in\Pi(P)$且(C_n)是收敛于$\{a\}$的零链．则由(2)式，对于每个$r>1$及充分大的n，$g^{-1}(C_n)$必与径向线段$(\zeta,r\zeta)$相交．故$a\in C_{rad}(g,\zeta)$．

称素端P是**可达的**，如果存在除一个端点在∂G上外都位于G内的一条若当弧，当n充分大时，这条若当弧与C_n相交；显然素端P可达与否同代表P的零链(C_n)的选取无关．

推论 9.3 *设$g(z)$在Δ内单叶，$g(\infty)=\infty$，且素端P对应于点ζ，则*

(11) $$\lim_{z\to\zeta}g(z)\text{ 存在}\Longleftrightarrow I(P)\text{ 由单点组成；}$$

(12) $$\lim_{r\to 1+0}g(r\zeta)\text{ 存在}\Longleftrightarrow P\text{ 只有一个主点；}$$

$$\Longleftrightarrow P\text{ 是可达的．}$$

证 前两个等价性可立即从(8)，(9)及定理9.7推出．并且若径向极限存在，则素端P沿若当弧$\{g(r\zeta):1\leqslant r\leqslant 2\}$可达．反之，若素端沿某条若当弧$B$可达，则由(2)式知正规函数$f(z)=1/g(z^{-1})(z\in D)$在$\zeta$有一个渐近值，因而由定理9.3(9.1节)该函数在ζ有一个径向极限．

一般地说，对应于一个给定点 ζ 的素端不能从几何上确定。但如果该素端已知，那末推论 9.3 给出了极限性质的一个纯几何特征。

关于素端的进一步的结果，参阅诸如 Piranian (1960) 及柯林伍德(Collingwood)与勒赫华特(Lohwater)的书和奥楚卡 (Ohtsuka) 的书。

问　　题

1．证明 E 类中的函数把几乎一切的径向线段 $[e^{i\theta}, 2e^{i\theta}]$ 映照成长度有限的曲线，并推证出角极限在 $\partial\Delta$ 上几乎处处存在。

2．设 T 是 Δ 内一条半开的若当弧，它螺旋环绕 $\partial\Delta$ 无限多次且以 $\partial\Delta$ 作为它的极限集．试证明对于 $G = \Delta\backslash T$ 的某个素端 P，有

$$I(P) = \Pi(P) = \partial\Delta.$$

3．试证明每一个无内点且不分隔平面的连续统可以是一个适当的单连通域的某个素端的所有主点的集合．

4．若 $g \in \Sigma$ 是星形函数(见 2.2 节)，则径向极限处处存在．试从柯林伍德的极大性定理推证出 $g(z)$ 在 $\partial\Delta$ 上除去一个第一范畴集之外连续。

9.3　局部连通性与若当曲线

本节始终假定 $g(z)$ 在 $\Delta = \{|z| > 1\}$ 内单叶，$g(\infty) = \infty$，且记 $G = g(\Delta)$。

1 设 $A\subset\mathbb{C}$ 是紧集，如果对每个 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得只要 $a, b\in A$ 且 $|a-b| < \delta$，就存在连通紧集 B 满足

$$a, b\in B\subset A \quad \operatorname{diam} B < \varepsilon, \tag{1}$$

则称紧集 A 是局部连通的。

容易看出 (Newman 88 页)，集合 A 局部连通当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$ 存在有限多个连通紧子集 $A_1, \cdots, A_m$ 使得

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_m, \quad \operatorname{diam} A_\mu < \varepsilon \ (\mu = 1, \cdots, m). \tag{2}$$

引理 9.7　局部连通紧集的连续映象仍为局部连通紧集。

这可从上述的局部连通性判定法推出，因为连续映照在紧集上一致连续，并且把连通集映照成连通集．特别地每条曲线作为

$[0,1]$ 的连续映象是局部连通的．下一个定理表明，如图 9.4 与 9.7 所示的集合不是局部连通集．

定理 9.8 下列三个命题等价：

(i) $g(z)$ 具有到 $\bar{\Delta}$ 的连续开拓；

(ii) ∂G 局部连通；

(iii) $E=\mathbb{C}\backslash G$ 局部连通．

这是映照函数的解析性质与象域及其边界的拓扑性质间的又一个一一对应关系．

证 (i) ⇒ (ii)：设 $g(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 上连续．函数 $g(z)$ 在 Δ 内的单叶性意味着 $\partial G=g(\partial\Delta)$ (Ahlfors 225 页)．由于 $\partial\Delta$ 紧且局部连通，由引理 9.7，其连续映象 $g(\partial\Delta)=\partial G$ 也如此．

(ii) ⇒ (iii)：设 ∂G 局部连通．对 $a,b\in E$，我们分别考虑集合 $[a,b]\cap\partial G$ 上最接近 a 和最接近 b 的点(如果有的话)，就容易推出 E 也是局部连通集．

(iii) ⇒ (i)：设 E 局部连通．我们将证明 G 的每个素端 P 的迹 $I(P)$ 都退化为单点集．从推论 9.3 推知对于每个 $\zeta\in\partial\Delta$，$g(\zeta)=\lim\limits_{z\to\zeta}g(z)$ 存在，而这蕴含着 $g(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 上连续．

设以零链 (C_n) 表示素端 P．给定 $\varepsilon>0$ 可以找到 n_0 使得对于 $n>n_0$，$\operatorname{diam}C_n<\delta$，此处 $\delta(0<\delta<\varepsilon)$ 依照局部连通性的定义选取．因为 C_n 的端点 a_n，b_n 位于 E 内，因此可以找到连通紧集 B_n 使得

$$a_n,\ b_n\in B_n\subset E,\ \operatorname{diam}B_n<\varepsilon\quad(n>n_0).$$

若 $w\in G$ 且 $|w-a_n|>\varepsilon$，则对于 $n>n_0$ 点 w 与 ∞ 不被 $B_n\cup C_n$ 分隔，也不被 $E=\mathbb{C}\backslash G$ 分隔．因 $(B_n\cup C_n)\cap E=B_n$ 连通，从叶尼采夫斯基定理(1.5 节)推知 w 与 ∞ 不被 $(B_n\cup C_n)\cup E=C_n\cup E$ 分隔．故 $w\notin\operatorname{Int}C_n$，这就推出对于 $n>n_0$，$\operatorname{Int}C_n\subset\{|w-a_n|\leqslant\varepsilon\}$，因而当 $n\to\infty$ 时 $\operatorname{diam}(\operatorname{Int}C_n)\to 0$．故由定义 (9.2.10)知 $I(P)$ 退化为一点．

2. 现在转向讨论 $g(z)$ 在 $\partial\Delta$ 上是否内射．设 A 是连续统，如果 $A\backslash\{a\}$ 不连通，即能找到非空集合 A_1 与 A_2 使得

(3) $$A\setminus\{a\}=A_1\cup A_2,\quad A_1\cap\overline{A}_2=\overline{A}_1\cap A_2=\varnothing,$$
则称点 a 为连续统 A 的一个**割点**. 比如，若当弧上除去两个端点外的每一点都是割点. 另一方面，(闭)若当曲线则没有割点.

引理 9.8 设 ∂G 局部连通，则 $g(z)$ 取值 $a\in\partial G$ 恰好一次当且仅当 a 不是 ∂G 的割点.

证 (a) 因 ∂G 局部连通，由定理 9.8，$g(z)$ 在 Δ 上连续. 显然 $g(z)$ 在 $\partial\Delta$ 上取值 $a\in\partial G$ 至少一次，比如说在 ζ 点取此值. 若对 $z\neq\zeta$，$g(z)\neq a$，则
$$\partial G\setminus\{a\}=\{g(z):\ z\in\partial\Delta,\ z\neq\zeta\},$$
且此集连通，故 a 不是 ∂G 的割点.

(b) 反之，设对两个不同的点 ζ，ζ' 有 $g(\zeta)=g(\zeta')=a$. 设 Q 是具有端点 ζ，ζ' 的 Δ 的横截线. 则 $g(Q)\cup\{a\}$ 是若当曲线(见图 9.8). 若以 G_1 和 G_2 表示其内区域和外区域(见 1.5 节)，则
(4) $$\partial G\setminus\{a\}=(G_1\cap\partial G)\cup(G_2\cap\partial G).$$

设 $\operatorname{Int}Q$ 表示 $\Delta\setminus Q$ 的有界分集，则 $g(\operatorname{Int}Q)$ 同 $g(Q)\cup\{a\}$ 不相交且不含 ∞. 故 $g(\operatorname{Int}Q)\subset G_1$. 因为 $g(\partial\Delta\cap\partial\operatorname{Int}\Delta)$ 不可能恰好由一点 a 组成，这就推知 (4) 式右端第一个集合非空，并且对第二个集合也可推出同样的结果. 因而 (4) 式表明点 a 是 ∂G 的一个割点.

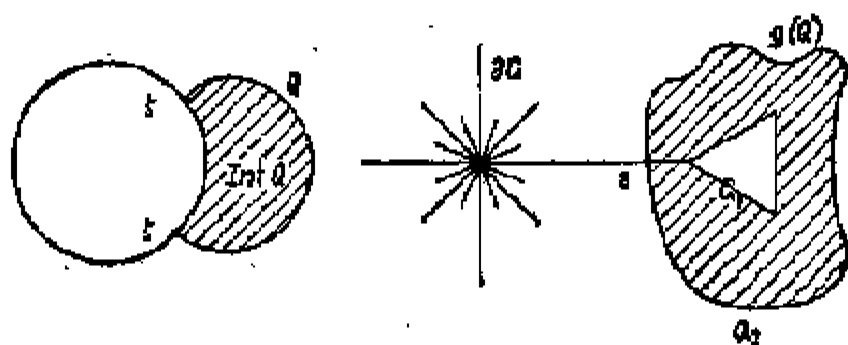


图 9.8

作为例子，考虑边界如图 9.8 所示的区域. 诸裂纹的端点及三角形上的点(左边的顶点除外)恰好对应于一个点 $\zeta\in\partial\Delta$. 所有其它的点恰好对应于 $\partial\Delta$ 上的两个点，但“中心点”例外，它对应于

$\partial\Delta$ 上无限多个点，事实上如果每个角反复不断地被越来越短的裂纹所平分则对应于 $\partial\Delta$ 上不可数个点. 这种边界当然是局部连通的.

我们来证明关于若当区域共形映射的开拓的卡拉皆屋多利定理:

定理 9.9 下列三命题等价:

(i) $g(z)$ 可开拓为 $\bar{\Delta}$ 到 $\bar{G}$ 的同胚;

(ii) ∂G 是闭若当曲线;

(iii) ∂G 局部连通并且无割点.

证 蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) 是显然的. 最后，设命题 (iii) 成立，则从定理 9.8 和引理 9.8 推出 $g(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 中连续内射. 因 $\bar{\Delta}$ 是紧集，$g(z)$ 也是 $\bar{\Delta}$ 到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的一个同胚，显然它的象 $\overline{g(\Delta)}=\bar{G}$.

现在我们把这一结果应用于一般若当区域.

定理 9.10 每个把若当区域 H 映照成若当区域 F 的单叶函数可以开拓为 $\bar{H}$ 到 $\bar{F}$ 的一个同胚.

证 设 $z_0\in H$ 且 $z=h(\zeta)$ 是一个单叶函数，把 Δ 映照成 H 使得 $h(\infty)=z_0$. 若 $f(z)$ 是给定的单叶函数，则函数

$$g(s)=[f(h(s))-f(z_0)]^{-1}\quad(s\in\Delta)$$

单叶且把 Δ 映照成区域 $G=\{(w-f(z_0))^{-1}: w\in F\}$，这个区域仍由若当曲线界成. 因 $g(\infty)=\infty$，从定理 9.9 推出 $g(s)$ 可开拓为 $\bar{\Delta}$ 到 $\bar{G}$ 的一个同胚. 类似地，$h(s)$ 可开拓为 $\bar{\Delta}$ 到 $\bar{H}$ 的一个同胚. 这就推出函数

$$f(z)=f(z_0)+1/g(h^{-1}(z))$$

可开拓为 $\bar{H}$ 到 $\bar{F}$ 的一个同胚.

这个定理可用来证明定理 9.9 的一种局部形式(对照图 9.9): 若 C 是 G 的横截线，则由推论 9.2 (9.1 节)知 $Q=g^{-1}(C)$ 是 Δ 的横截线. 假定 $A=\partial G\cap\partial(\mathrm{Int}\,C)$ 是若当弧，我们记 $B=\partial\Delta\cap\partial(\mathrm{Int}\,Q)$，则 $A\cup C$ 和 $B\cup Q$ 都是若当曲线，函数 $g(z)$ 把 $B\cup Q$ 的内区域映成 $A\cup C$ 的内区域. 于是从定理 9.10 推知 $g(z)$ 把 B 一一连续地映照成 A; 其中在 B 的端点处，我们是限定在 $\mathrm{Int}\,Q$ 的内



图 9.9

部逼近端点(以此确定其象点)。

推论 9.4 若 ∂G 是闭若当曲线,则 $g(z)$ 可开拓为 $\hat{\mathbb{C}}$ 到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的一个同胚.

一个直接推论是纯拓扑的绍恩弗莱斯 (Schoenflies) 定理: 若 $J\subset\mathbb{C}$ 是闭若当曲线,则存在 $\hat{\mathbb{C}}$ 到 $\hat{\mathbb{C}}$ 的同胚把 $\{|z|=1\}$ 映成 J.

证 由定理 9.9,函数 $g(z)$ 给定了 Δ 到 $\overline{G}$ 的一个同胚. 设单叶函数 $f(s)$ 把 $D=\{|s|<1\}$ 映成若当曲线 ∂G 的内区域 F, 则由定理 9.10 知 $f(s)$ 给出 $\overline{D}$ 到 $\overline{F}$ 的一个同胚.

因由若当曲线定理 $\partial G=\partial F$,而知函数

$$(5)\qquad \varphi(z)=f^{-1}(g(z)),\quad (|z|=1)$$

是 $\partial\Delta$ 到 ∂D 的同胚. 若定义

$$g(re^{i\theta})=f(r\varphi(e^{i\theta}))\quad (0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

则由 (5) 式, $g(z)$ 在 $|z|=1$ 上的两种定义完全一致, 并且由于 $\hat{\mathbb{C}}$ 是 F 与 $\overline{G}$ 的不相交并,故 $g(z)$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 到自身的同胚.

我们还要导出一个单叶性准则, 它推广了引理 1.1(1.1 节).

推论 9.5 设 $f(z)$ 在若当区域 H 内解析且在 ∂H 上连续内射. 则 $f(z)$ 在 H 内单叶, 且 $f(H)$ 是若当曲线 $f(\partial H)$ 的内区域.

证 假设条件表明 $J=f(\partial H)$ 是若当曲线. 因 $\partial f(H)\subset f(\partial H)=J$,且因 $\infty\notin f(H)$, 推论 1.7 (1.5 节)表明 $f(H)$ 位于 J 的内区域 F 内. 由定理 9.10 通过将若当区域 H 和 F 映照于 D,我们可以假设 $F=H=D$. 而反射原理 (Ahlfors 171 页)表明 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析,故由引理 1.1 便推出所要证明的结论.

3. 卡氏核定理(1.4 节)已给出(标准化)单叶函数局部一致收敛性的一个几何的充要条件(对照 Gaier 1956)系用包含∞的区域来阐述(这一条件的最终形式是由 J. 贝克尔提出来的).

我们称 C 内的紧集序列 (A_n) 为一致局部连通，如果局部连通性定义中的数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 可取成与 n 无关. 即对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $a_n, b_n\in A_n$ 且 $|a_n-b_n|<\delta$ 时，能找到连通紧集 B_n 满足

(6) $$a_n, b_n\in B_n\subset A_n,\ \operatorname{diam}B_n<\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots).$$

例如，每个集 $A_n=\{w:|w|=1, |\arg w|\leqslant\pi-n^{-1}\}$ 都是局部连通的，而序列 (A_n) 却非一致局部连通.

定理 9.11 设函数 $g_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 和 $g(z)$ 在 Δ 内单叶在 $\bar\Delta$ 上连续，且设 $g_n(\infty)=\infty$，$E_n=\mathbb{C}\backslash g_n(\Delta)$. 假定当 $n\to\infty$ 时，在 Δ 内局部一致地有

(7) $$g_n(z)\to g(z)$$

则该收敛在 $\bar\Delta$ 内一致当且仅当序列 (E_n) 一致局部连通.

证 (a) 设 (7) 式中的收敛在 $\bar\Delta$ 内一致. 则序列 $(g_n(z))$ 在 $1\leqslant|z|\leqslant 2$ 内等度连续. 假定集列 (E_n) 非一致局部连通，则存在点 $a_n, b_n\in E_n$，$|a_n-b_n|\to 0$，它们不能在 E_n 内用直径很小的子集相连接.

集 $[a_n, b_n]\cap g_n(\Delta)$ 至多由可数个区间组成. 其原象 $Q_{n\nu}$ 是 Δ 的横截线. 因为

$$\sup_\nu[\operatorname{diam}g_n(Q_{n\nu})]\leqslant|b_n-a_n|\to 0\quad(n\to\infty)^{1)}$$

将定理 9.2 (9.1 节) 应用于 $1/g_n(\zeta^{-1})$ $(\zeta\in D)$ 推出当 $n\to\infty$ 时，$\sup_\nu[\operatorname{diam}Q_{n\nu}]\to 0$. 因而弧 $L_{n\nu}=2\Delta\cap\overline{\operatorname{Int}Q_{n\nu}}$ 满足 $\sup_\nu[\operatorname{diam}L_{n\nu}]\to 0$，且因 (g_n) 等度连续而推出

$$\sup_\nu[\operatorname{diam}g_n(L_{n\nu})]\to 0\quad(n\to\infty).$$

故集合

1) 该式及下面两式中 g_n 的下标 n 为译者所加.

$$B_n = ([a_n, b_n] \setminus \bigcup_\nu g_n(Q_{n\nu})) \cup \bigcup_\nu g_n(L_{n\nu}) \subset E_n$$

满足 $\operatorname{diam} B_n \to 0$ $(n \to \infty)$，这是一个矛盾，因为 B_n 连通且包含 a_n 与 b_n.

(b) 反之，设 (E_n) 一致局部连通. 对于给定的 $\varepsilon > 0$ 我们按照一致局部连通性定义选取 $\delta (0 < \delta < \varepsilon)$. 因 $g(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 内连续，故可选取 $\eta > 0$ 使得

(8) $\quad |g(z') - g(z'')| \leqslant \frac{1}{12}\delta \quad (1 \leqslant |z'| \leqslant 2, 1 \leqslant |z''| \leqslant 2,$

$$|z' - z''| \leqslant 2\eta).$$

由 (7) 式推出对于某个常数 K, $|g_n'(\infty)| \leqslant K$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 鉴于引理 9.5，我们选取 $\rho > 1$ 使得 $\rho < 1 + \eta$ 且

(9) $$8K(\rho - 1)^{\frac{1}{2}}\eta^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{3}\delta.$$

由 (7) 式，我们可以找到只依赖于 ε 的整数 n_0 使得

(10) $\quad |g(z) - g_n(z)| < \frac{\delta}{12} \quad (\rho \leqslant |z| \leqslant 2, \ n > n_0).$

故由 (8) 式推出

(11) $\quad |g_n(z') - g_n(z'')| < \frac{1}{3}\delta \ (|z'| = |z''| = \rho,$

$$|z' - z''| \leqslant 2\eta).$$

设 $n > n_0$, $1 < |z| < \rho$，由引理 9.5 及 (9) 式存在点 ζ_n, $\zeta_n' \in \partial\Delta$ 具有

(12) $\quad \arg z - \eta < \arg \zeta_n < \arg z < \arg \zeta_n' < \arg z + \eta$

使得

(13) $\quad |g_n(\zeta_n) - g_n(\rho\zeta_n)| \leqslant \int_1^\rho |g_n'(r\zeta_n)| dr < \frac{1}{3}\delta,$

并且对 ζ_n' 也有类似的结果. 因而从 (11) 式得到

$$|g_n(\zeta_n) - g_n(\zeta_n')| < \delta.$$

故由 δ 的选取，存在连通紧集 B_n 适合

(14) $\quad g_n(\zeta_n), \ g_n(\zeta_n') \in B_n \subset E_n, \ \operatorname{diam} B_n < \varepsilon.$

设 $Q_n=[\zeta_n,\rho\zeta_n]\cup[\zeta_n',\rho\zeta_n']\cup\{\rho e^{i\theta}:\arg\zeta_n\leqslant\theta\leqslant\arg\zeta_n'\}$。我们指出，点 $g_n(z)$ 不会落入 $B_n\cup g_n(Q_n)$ 的无界分集. 因为否则点 $g_n(z)$ 与 ∞ 就不被 $B_n\cup g_n(Q_n)$ 分隔，而由于它们也不被 E_n 分隔且 $(B_n\cup g_n(Q_n))\cap E_n=B_n$ 连通，故由叶尼采夫斯基定理（1.5 节），它们不被 $(B_n\cup g_n(Q_n))\cup E_n=g_n(Q_n)\cup E_n$ 分隔，而这是不正确的，因为由 (12) 式 $z\in\operatorname{Int}Q_n$。

从 (11)，(12)，(13)，(14) 式我们得到

$$\operatorname{diam}(B_n\cup g_n(Q_n))\leqslant\operatorname{diam}B_n+\operatorname{diam}g_n(Q_n)<\varepsilon+\frac{3\varepsilon}{3}<2\varepsilon.$$

因 $g_n(z)$ 不位于 $B_n\cup g_n(Q_n)$ 的无界分集，我们推出

$$|g_n(z)-g(z)|\leqslant|g_n(z)-g_n(\rho\zeta_n)|+|g_n(\rho\zeta_n)-g(\rho\zeta_n)|+|g(\rho\zeta_n)-g(z)|<3\varepsilon,$$

其中用到了 (10) 式和 (8) 式. 这一估计对 $n>n_0$ 在 $1<|z|<\rho$ 内成立，而由连续性即知在 $1\leqslant|z|<\rho$ 内也成立. 因此 (7) 式中的收敛在 Δ 内一致。

关于“可变域”的进一步的定性结果已由拉多(Radó 1923)，马库雪维奇 (Markuševič 1936) 和苏伐洛夫 (Suvorov 1953) 等人给出. 关于可变域的定量结果在应用上是重要的，因为实际上区域常常是近似地给出的；见拉甫伦捷夫与沙巴特的书第四章以及诸如 Warschawski 1950，1952，1956，Gaier 1962，Polansky 1970.

问　　题

1. 设 $A\subset\mathbb{C}$ 是一个局部连通的连续统. 试用定理 9.8 的证明方法证明 $\hat{\mathbb{C}}\backslash A$ 的每个分集的边界仍局部连通(托雷斯特定理，参看 Whyburn 106 页).

2. 设 $A\subset\hat{\mathbb{C}}$ 是无割点的局部连通连续统. 试证每点 $a\in A$ 位于包含在 A 中的一条闭若当曲线上(参看 Whyburn 79 页).

3. 设 H 是闭若当曲线 C 的内区域. 设 z_1, z_2, z_3 是 ∂D 上给定的点且 w_1, w_2, w_3 是 C 上给定的具有同样循环顺序的点. 试证明存在唯一的单叶函数使得 $f(D)=H$，$f(z_j)=w_j$ $(j=1,2,3)$.

4. 设单叶函数 $g(z)$ 把 Δ 映照成若当弧 A 的余集. 试证明 $\partial\Delta$ 由两段闭圆弧组成，函数 $g(z)$ 把每一段圆弧都一一映照成 A.

5.设 F 是具有局部连通边界的单连通域．若给定 ∂F 上的实值连续函数 $\phi(z)$，试证明存在函数 $u(z)$ 在 F 内调和在 $\bar{F}$ 上连续，使得对于 $z\in\partial F$ 有 $u(z)=\phi(z)$（即迪里克莱问题；使用圆盘内的普阿松积分）．

6.设 H 与 F 是若当区域．设 $f(z)$ 在 H 内解析在 $\bar{H}$ 上连续，并假定 $f(\partial H)=\partial F$．试证明：$f(z)$ 在 H 内单叶，只要

(a) $f(z)$ 取某值 $w_0\in F$ 一次，或

(b) 对 $z\in H$，$f'(z)\neq 0$．

（Pólya-Szegö 122 页；对照推论 9.5）．

7.设 $g_n(z)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 Δ 内单叶，$g_n(\infty)=\infty$，$g_n'(\infty)>0$ 且 $g'(\infty)>0$．假定 $g_n(\Delta)$ 和 $g(\Delta)$ 分别由若当曲线 J_n 和 J 界成．试证明：当 $n\to\infty$ 时，$g_n(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 内一致收敛于 $g(z)$ 当且仅当存在 J_n 与 J 的参数表示 $\varphi_n(s)$ 和 $\varphi(s)$ 使得当 $n\to\infty$ 时 $\varphi_n(s)$ 在 $\{|s|=1\}$ 上一致收敛于 $\varphi(s)$（Radó 1923）．

9.4 拟共形曲线

1. 闭曲线 $J\subset\mathbb{C}$ 被称为拟共形曲线（或拟圆周），如果对于某个常数 K 有

(1) $$\min[\operatorname{diam}J',\operatorname{diam}J'']\leqslant K|w'-w''|\quad(w',w''\in J),$$

其中 J' 和 J'' 是组成 $J\setminus\{w',w''\}$ 的两段弧（Ahlfors 1963）．从 (1) 式推出 J 是若当曲线；我们将证明每条拟共形曲线是单位圆周在拟共形映照下的象．容易看出逐段光滑的若当曲线为拟共形当且仅当它没有尖点（左右切线的夹角为 0 或 2π 的点——译者注）．

我们将在例 10.1 中（10.2 节）构造一条其映照函数在任一边界点都不共形的拟共形曲线 J，因而 J 在每一点无切线（定理 10.4），并且是不可求长曲线（10.4 节引理 10.7）．

我们给出一个用交比描述的拟共形曲线特征性质，这一性质在麦比乌斯变换下不变．

引理 9.8 闭曲线 J 拟共形当且仅当对于某个正常数 γ，使得

(2) $$\left|\frac{w_1-w_3}{w_2-w_3}\right|\left|\frac{w_2-w_4}{w_1-w_4}\right|\geqslant\gamma>0.$$

对 J 上任何顺序排列的四点 w_1,w_2,w_3,w_4 有不等式．

证 (a) 设(2)式成立。取 $w_1=w'$，$w_3=w''$ 并适当选取 $w_2\in J'$，$w_4\in J''$，即从(2)式推出

$$\frac{1}{4}\operatorname{diam}J'\operatorname{diam}J''\leqslant\frac{1}{\gamma}|w'-w''|\operatorname{diam}J$$

$$\leqslant\frac{1}{\gamma}|w'-w''|(\operatorname{diam}J'+\operatorname{diam}J'').$$

这蕴含了(1)式，其中 $K=8\gamma^{-1}$。

(b) 反之，设(1)式成立。由对称性可假定 $|w_1-w_3|\leqslant|w_2-w_4|$ 且 w_2 位于 $J\backslash\{w_1,w_3\}$ 的直径较小的那段弧上。则由(1)式推出 $|w_2-w_3|\leqslant K|w_1-w_3|$，而且

(3) $|w_1-w_4|\leqslant K|w_2-w_4|$ 或 $|w_3-w_4|\leqslant K|w_2-w_4|$。

在第二种情形，我们可有

$$|w_1-w_4|\leqslant|w_3-w_4|+|w_1-w_3|\leqslant(K+1)|w_2-w_4|.$$

因此在两种情形下(2)式都成立，其中 $\gamma=(K^2+K)^{-1}$。

2. 我们将给出一个与格隆斯基不等式(3.1节)有关的拟共形曲线解析特征。

设 $0\leqslant\kappa\leqslant1$，定义 $\Sigma(\kappa)$ 为 Σ 类中满足

(4) $$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right|\leqslant\kappa\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\quad(\lambda_k\in\mathbf{C})$$

的函数 g 的子类，其中 $b_{kl}(k,l=1,2,\cdots)$ 是由(3.1.8)式定义的 g 的格隆斯基系数。由格隆斯基不等式(3.1.22)即知 $\Sigma(1)=\Sigma$。

例 9.2 设 $g(z)=z+\cdots$ 对于某个 $\rho<1$ 在 $|z|>\rho$ 内单叶。应用格隆斯基不等式于 $\rho^{-1}g(\rho z)\in\Sigma$，知 $g\in\Sigma(\rho^2)$。函数 $z+\rho^2z^{-1}$ 表明这一关系是精确的。

下面我们来建立戈鲁辛不等式的一种更精确形式，其证明类似于定理3.3及其后边的注记。

引理 9.9 设 $0\leqslant\kappa\leqslant1$，则 $g\in\Sigma(\kappa)$ 当且仅当对于 $z_\nu\in\Delta$，$\gamma_\nu\in\mathbf{C}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 及一切 n，有

(5) $$\left|\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\gamma_\nu\log\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\right|$$

$$\leqslant \kappa \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\mu\bar{\gamma}_\nu \log \frac{1}{1-(z_\mu\bar{z}_\nu)^{-1}}.$$

特别地，取 $n=1$ 即得

(6) $(1-|z|^{-2})^{\kappa} \leqslant |g'(z)| \leqslant (1-|z|^{-2})^{-\kappa} \quad (|z|>1).$

引理 9.9 表明，类 $\Sigma(\kappa)$ 在局部一致收敛拓扑下是紧的.

我们再来证明一个在麦比乌斯变换下不变的性质:

引理 9.10 设 $\varphi(z)=a+bz^{-1}+\cdots$ 是 Δ 到 Δ 的麦比乌斯变换. 若 $g\in\Sigma(\kappa)$，则

(7) $$h(z)=\frac{bg'(a)}{g(\varphi(z))-g(a)}=z+\cdots \quad (z\in\Delta)$$

属于 $\Sigma(\kappa)$，而且 $c^{-1}g(cz)\ (|c|\geqslant 1)$ 也属于 $\Sigma(\kappa)$.

证 设 $\zeta_\nu\in\Delta$, $z_\nu=\varphi(\zeta_\nu)$，则

(8) $$\frac{h(\zeta_\mu)-h(\zeta_\nu)}{\zeta_\mu-\zeta_\nu}=\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}$$
$$\times\frac{z_\mu-a}{g(z_\mu)-g(a)}\frac{a-z_\nu}{g(a)-g(z_\nu)}g'(a),$$

(9) $$1-\frac{1}{\zeta_\mu\bar{\zeta}_\nu}=\left(1-\frac{1}{z_\mu\bar{z}_\nu}\right)\left(1-\frac{1}{z_\mu\bar{a}}\right)^{-1}$$
$$\times\left(1-\frac{1}{a\bar{z}_\nu}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{a\bar{a}}\right).$$

应用 (5) 式，以 $n+1$ 代 n，置 $\gamma_{n+1}=-(\gamma_1+\cdots+\gamma_n)$, $z_{n+1}=a$. 根据 (8) 式与 (9) 式，知 (5) 式对 h 和 ζ_ν 成立，从而由引理 9.9 推出 $h\in\Sigma(\kappa)$. 最后一个结论可立即从 (4) 式推出.

定理 9.12 设 $0\leqslant\kappa<1$, $g\in\Sigma(\kappa)$，则 $g(z)$ 具有一个到 $\bar{\Delta}$ 的同胚开拓且把 $\partial\Delta$ 映照成一条拟共形曲线.

证 类似 (10.1.18) 式，我们从 (6) 式的上界估计推出

(10) $|g(z_1)-g(z_2)|\leqslant K_1|z_1-z_2|^{1-\kappa} \quad (1<|z_j|<2; j=1,2),$

其中 K_1 仅依赖于 κ. 故 $g(z)$ 在 $\bar{\Delta}$ 上连续.

设 $|\zeta|=1$, $\mathrm{Re}\zeta\geqslant 0$，在引理 9.9 中取 $n=2$, $z_1=r_1\zeta\ (r_1>1)$, $z_2=-r_2\ (r_2>1)$, $\gamma_1=1$, $\gamma_2=-1$，得到

(11) $$\frac{|g'(r_1\zeta)g'(-r_2)|}{|g(r_1\zeta)g(-r_2)|^2}\leqslant\frac{|1+(r_1r_2\zeta)^{-1}|^{2\kappa}}{|r_1\zeta+r_2|^2(1-r_1^{-2})^{\kappa}(1-r_2^{-2})^{\kappa}}\leqslant(r_1-1)^{-\kappa}(r_2-1)^{-\kappa}.$$

选取 ρ_1 和 ρ_2 使得

(12) $$\int_1^{\rho_1}|g'(r\zeta)|dr=\int_1^{\rho_2}|g'(-r)|dr=b=|g(\zeta)-g(-1)|.$$

因 $1\leqslant r_j\leqslant\rho_j\ (j=1,2)$ 时 $|g(r_1\zeta)-g(-r_2)|\leqslant 3b$，积分(11)式我们得到

$$b^2\leqslant\frac{9b^2}{(1-\kappa)^2}(\rho_1-1)^{1-\kappa}(\rho_2-1)^{1-\kappa}.$$

由(12)式及(6)式的下界估计有 $b\geqslant(1+\kappa)^{-1}\ \rho_j^{-\kappa}(\rho_j-1)^{\kappa+1}$ $(j=1,2)$，于是我们推出 $|g(\zeta)-g(-1)|=b\geqslant\frac{1}{K_2}\ (\mathrm{Re}\zeta\geqslant 0)$ 其中 K_2 只依赖于 κ. 经旋转得

(13) $$|g(e^{it})-g(e^{i\tau})|\geqslant\frac{1}{K_2}\quad\left(t+\frac{\pi}{2}\leqslant\tau\leqslant t+\frac{3\pi}{2}\right).$$

设 $w_1,\cdots,w_4$ 是 $J=g(\partial\Delta)$ 上顺序排序的四点，$w_\nu=g(z_\nu)$ $(\nu=1,\cdots,4)$. 我们可以找到麦比乌斯变换 $\varphi(z)$ 把 Δ 变为 Δ 且使得 $\varphi(i^\nu)=z_\nu\ (\nu=1,2,3)$. 于是若对于某点 ζ，$z_4=\varphi(\zeta)$ 则必有 $\mathrm{Re}\zeta\geqslant 0$. 我们考虑由(7)式定义的函数 $h(z)$. 由交比在麦比乌斯变换下的不变性，且因 $\mathrm{diam}\,h(\partial\Delta)\leqslant 4$，便从(13)式得出

$$\left|\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\cdot\frac{w_3-w_4}{w_1-w_4}\right|$$
$$=\left|\frac{h(i)-h(-i)}{h(-1)-h(-i)}\cdot\frac{h(-1)-h(\zeta)}{h(i)-h(\zeta)}\right|\geqslant\frac{1}{16K_2^2},$$

于是由引理 9.8 知 J 是一条拟共形曲线.

3. 函数 $w(z)=w(x+iy)$ 的复偏导数定义为

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial w}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

设 $0\leqslant\kappa<1$. 如果 $g\in\Sigma$ 具有到 $\mathbf{C}$ 的同胚开拓，并且在 D 内

在实可微意义下连续可微且满足

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g(z)\right| \leqslant \kappa \left|\frac{\partial}{\partial z} g(z)\right| \quad (z \in D), \tag{14}$$

则称函数 g 具有到 $\mathbf{C}$ 的 κ-拟共形扩张。我们并没有假定函数在圆周 $|z|=1$ 上可微。

在拟共形映照的一般理论中，有必要用函数在直线上的绝对连续性代替可微性(参看：Lehto and Virtanen 176 页)。下述定理(Schiffer 1963，Springer 1964，Kühnau 1971b；也可参看：Lehto 1973) 在这种较宽的定义下仍然成立。

定理 9.13 若 $g \in \Sigma$ 具有到 $\mathbf{C}$ 的 κ-拟共形扩张 $(0 \leqslant \kappa < 1)$，则 $g \in \Sigma(\kappa)$。

我们需要用到如下形式的迪里克莱原理：设在 D 内 $u(z)$ 实调和，$v(z)$ 连续可微，假定这两个函数在 $\bar{D}$ 上连续。如果对于 $z \in \partial D$，有 $u(z)=v(z)$，则

$$\iint_D \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 dQ \leqslant \iint_D \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right|^2 dQ. \tag{15}$$

对于两个函数都在 $\bar{D}$ 上可微的特殊情形，我们来证明这个不等式。由格林公式有

$$\operatorname{Re}\iint_D u_z \bar{v}_z dQ = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u_r v d\theta,$$

$$\iint_D |v_z|^2 dQ = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} u_r u d\theta,$$

由于当 $r=|z|=1$ 时有 $u=v$，从而两个二重积分具有相同的值。于是

$$\iint_D (|v_z|^2 - |u_z|^2) dQ = \iint_D |v_z - u_z|^2 dQ \geqslant 0.$$

证 设 $m=1,2,\cdots$。若 $\Phi_k(w)$ 是法贝尔多项式，则对于 $z \in \Delta$，函数

$$h(w) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} \Phi_k(w) \quad (\lambda_k \in \mathbf{C}) \tag{16}$$

满足

(17) $h(g(z)) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k},\quad d_k = \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_l,$

(18) $\frac{1}{\pi}\iint_{\hat{C}\setminus g(\Delta)} |h'(w)|^2 d\Omega = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k|d_k|^2,$

(见(3.1.18)及(3.1.20)式).

令 $s(w) = \mathrm{Re}\,h(w)$. 从(14)式推出对于 $z \in D$ 有

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} s(g(z))\right|^2 = |g_z s_w + \overline{g_{\bar z} s_w}|^2 \leqslant |s_w|^2(|g_z| + |g_{\bar z}|)^2$$

$$\leqslant \frac{1+\kappa}{1-\kappa}|s_w|^2(|g_z|^2 - |g_{\bar z}|^2).$$

因 $|g_z|^2 - |g_{\bar z}|^2$ 是代换 $w = g(z)$ $(z \in D)$ 的雅可比,故推出

(19) $$\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\iint_{\hat{C}\setminus g(\Delta)} |h'(w)|^2 d\Omega = 4\,\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\iint_{g(D)} \left|\frac{\partial s}{\partial w}\right|^2 d_w\Omega$$

$$\geqslant 4\iint_D \left|\frac{\partial}{\partial z} s(g(z))\right|^2 d_z\Omega.$$

由(17)式,函数

(20) $$\phi(z) = h(g(z^{-1})) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^{-k} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{k} z^k$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(d_k + \frac{\lambda_k}{k}\right) z^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} d_k z^k$$

在 D 内解析,故 $u(z) = \mathrm{Re}\,\phi(\bar z) = \mathrm{Re}\,\bar\phi(z)$ 调和. 因 $u(z)$ 与 $v(z) = s(g(z))$ 在 C 内连续且由(20)式有 $u(z) = v(z)$ $(z \in \partial D)$,于是从(19)与(15)式推知

$$\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\iint_{\hat{C}\setminus f(\Delta)} |h'(w)|^2 d\Omega \geqslant 4\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 d\Omega = \iint_D |\phi'(z)|^2 d\Omega.$$

应用(20)式计算最后一个积分,便由(18)式得到

$$\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{|\lambda_k|^2}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} k|d_k|^2\right)$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{m} k\left|d_k + \frac{\lambda_k}{k}\right|^2 + \sum_{k=m+1}^{\infty} k|d_k|^2,$$

经整理得

$$(21)\quad \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_k\lambda_l - \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{m} d_k\lambda_k$$

$$\leqslant \kappa\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k} - \frac{1}{1+\kappa}\sum_{k=1}^{m} k\left|d_k - \kappa\frac{\bar{\lambda}_k}{k}\right|^2$$

$$-\frac{1}{1+\kappa}\sum_{k=m+1}^{\infty} k|d_k|^2.$$

由 $\arg\lambda_k$ 的任意性，我们就有

$$(22)\qquad \left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_k\lambda_l\right| \leqslant \kappa\sum_{k=1}^{m}\frac{|\lambda_k|^2}{k}\quad (m=1,2,\cdots).$$

注 从(21)式，我们可看出仅当对于某个 $\alpha\in\mathbf{R}$ 适合

$$(23)\quad d_k=\sum_{l=1}^{m} b_{kl}\lambda_l=\begin{cases} e^{i\alpha}\kappa\dfrac{\bar{\lambda}_k}{k} & (1\leqslant k\leqslant m),\\ 0 & (k>m),\end{cases}$$

(22)式中的等号才能成立。例如在 $m=1$ 时，极值函数即为

$$g(z)=\begin{cases} z+e^{i\alpha}\kappa z^{-1} & (|z|>1),\\ z+e^{i\alpha}\kappa\bar{z} & (|z|\leqslant 1).\end{cases}$$

阿尔福斯与贝克尔的如下结果(Ahlfors 1974, Becker 1973)给出一类这样的例子；可对照定理 6.8(6.3 节)。

推论 9.6 设 $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$ 且

$$(24)\qquad (|z|^2-1)\left|z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right|\leqslant\kappa<1\quad (z\in\Delta)$$

则 $g\in\Sigma(\kappa)$。

证 设 $\rho_n=1+\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，我们定义

$$(25)\quad g_n(z)=\begin{cases}\rho_n^{-1}g(\rho_n z) & (|z|\geqslant 1),\\ \rho_n^{-1}g\left(\dfrac{\rho_n}{\bar{z}}\right)-\left(\dfrac{1}{\bar{z}}-z\right)g'\left(\dfrac{\rho_n}{\bar{z}}\right) & (|z|<1).\end{cases}$$

因(6.3.9)式表示一条娄威纳链(见 6.3 节)，故 $g_n(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的同胚。从(24)与(25)式推出

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} g_n(z)\right| = \left(\frac{1}{|z|^2} - 1\right)\left|\frac{\rho_n}{\bar{z}} g'\left(\frac{\rho_n}{\bar{z}}\right)\right|$$

$$\leqslant \kappa\left|g'\left(\frac{\rho_n}{\bar{z}}\right)\right| = \kappa\left|\frac{\partial}{\partial z} g_n(z)\right|,$$

故函数 $g_n \in \Sigma$ 具有到 C 的拟共形扩张。因此，由定理 9.13 知 $g_n \in \Sigma(\kappa)$，且由于 $g_n(z)$ 在 Δ 内局部一致收敛于 $g(z)$ 而知 $g \in \Sigma(\kappa)$。

现在我们可以给出拟共形曲线的一个纯解析特征。

定理 9.14 设 $g \in \Sigma$。下列三命题等价：

(i) $g(\Delta)$ 由拟共形曲线界成；

(ii) $g(z)$ 具有到 C 的拟共形扩张；

(iii) 对某个 $\kappa < 1$，$g \in \Sigma(\kappa)$。

在定理 9.12 中已证明 (iii) ⇒ (i)，而在定理 9.13 中已证明 (ii) ⇒ (iii)。等价关系 (i) ⟺ (ii) 已为阿尔福斯所证明 (Ahlfors 1963)。附带指出，与定理 9.13 不同，这里我们只要求若 $g \in \Sigma(\kappa)$ 则必存在 g 的一个 κ'-拟共形扩张（κ' 是某个小于 1 的数）而并不知还能否取 $\kappa' = \kappa$。

我们采用贝尔林与阿尔福斯的如下结果 (Beurling and Ahlfors 1956)：若 $\phi(x)$ 是 R 内给定的增函数，且对某个常数 λ 它满足

$$\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{\phi(x+\sigma) - \phi(x)}{\phi(x) - \phi(x-\sigma)} \leqslant \lambda \quad (x \in \mathbf{R},\ \sigma > 0), \tag{26}$$

则函数

$$\begin{aligned}\Phi(x+iy) &= \frac{1+i}{2}\int_0^1 [\phi(x+\sigma y) - i\phi(x-\sigma y)]\,d\sigma \\ &= \frac{1+i}{2y}\left(\int_x^{x+y} \phi(t)\,dt - i\int_{x-y}^{x} \phi(t)\,dt\right)\end{aligned} \tag{27}$$

确定了一个到 C 的拟共形扩张 (Lehto-Virtanen 86 页；进一步的结果可参阅 Reich and Strebel 1974)。

(i) ⇒ (iii) 的证明。设 $g(\Delta)$ 是由拟共形曲线 J 界成。我们首先证明

$$|g(\zeta) - g(\zeta')| \geqslant \frac{1}{K_1} \quad (\zeta, \zeta' \in \partial\Delta,\ |\zeta - \zeta'| \geqslant 1), \tag{28}$$

其中 K_1 仅依赖于定义 (1) 的常数 K。如若不然，即假定存在函数 g_n 及点 ζ_n, ζ'_n 满足 $|\zeta_n - \zeta'_n| \geq 1$ 使得

$$\operatorname{diam} g_n(A_n) \leqslant K|g_n(\zeta_n) - g_n(\zeta'_n)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

其中 A_n 是 $\partial\Delta$ 上 ζ_n 到 ζ'_n 间的一段弧。根据定理 9.2 后面的注这是不可能的，因为函数 $g_n(z^{-1}) = z^{-1} + \cdots (z \in D)$ 满足 (9.3.17) 式，而且由 (1) 式，具有给定常数 K 的拟共形曲线族为一致局部连通(9.3 节)。于是由定理 9.11 推出相应的函数 $g \in \Sigma$ 的族等度连续。这意味着

$$(29) \qquad |g(\zeta) - g(\zeta')| \leqslant \eta(\delta) \quad (\zeta, \zeta' \in \partial\Delta, \ |\zeta - \zeta'| \leqslant \delta)$$

其中 $\eta(\delta)$ 仅依赖于 δ 与 K 且满足 $\eta(\delta) \to 0 \ (\delta \to 0)$。

函数 $h(s) = g\left(\dfrac{s - i}{s + i}\right)$ 把下半平面 H^- 映照为 J 的外区域。设 $f(s)$ 把上半平面 H^+ 映照为 J 的内区域使得 $f(\infty) = h(\infty)$。由定理 9.10，这些函数都具有到 $\mathbb{R}$ 的同胚开拓。下面要证明增函数：

$$(30) \qquad \phi(s) = f^{-1}(h(s)) \quad (s \in \mathbb{R})$$

满足 (26) 式，因此它具有拟共形扩张 (27)。函数 (27) 在 H^+ 内连续可微，并且

$$g(z) = f\left(\phi\left(i\frac{1 + z}{1 - z}\right)\right) \quad (|z| \leqslant 1)$$

作出所需要的到 $\bar{D}$ 的拟共形扩张。

现在证明 (26) 式。给定 $x \in \mathbb{R}, \sigma > 0$，可以找到麦比乌斯变换 $\varphi(z)$ 与 $\chi(z)$ 满足 $\varphi(\Delta) = H^+, \chi(\Delta) = H^-$ 使得

$$(31) \quad \begin{aligned} &\chi(1) = \infty, \ \chi(+i) = x - \sigma, \ \chi(-1) = x, \ \chi(-i) = x + \sigma, \\ &\varphi(1) = \infty, \ \varphi(-i) = \phi(x - \sigma), \ \varphi(-1) = \varphi(x), \\ &\varphi(\zeta) = \phi(x + \sigma), \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{Im}\zeta > 0$，如果限制 ζ 点不靠近 ± 1 则 (26) 式成立。

分别用适当的麦比乌斯变换把函数 $f(\varphi(z))$ 和 $h(\chi(z))$ 标准化成为 $f^* \in \Sigma$ 与 $h^* \in \Sigma$。由交比在麦比乌斯变换下的不变性，由 (30) 和 (31) 式推出

$$(32) \qquad \frac{f^*(1) - f^*(-1)}{f^*(-i) - f^*(-1)} \cdot \frac{f^*(-i) - f^*(\zeta)}{f^*(1) - f^*(\zeta)}$$

$$= \frac{h^*(1) - h^*(-1)}{h^*(i) - h^*(-1)} \cdot \frac{h^*(i) - h^*(-i)}{h^*(1) - h^*(-i)}.$$

仍由于交比的不变性，引理 9.8 即表明 $f^*(\partial\Delta)$ 与 $h^*(\partial\Delta)$ 是拟共形曲线，它们在 (1) 式内都有界且相应的常数 K 同 x 和 σ 无关。于是由 (28) 式知 (32) 式内除 $|f^*(1) - f^*(\zeta)|$ 外所有因式不为零。不过结论对于这个因式也成立，这是因为 (32) 式内所有因式以 4 为界。因此由 (29) 式，$|1 - \zeta|$ 不为 0；通过考虑不同的交比，对 $|1 + \zeta|$ 也可证明同样的结论。

问　　题

1. 试证函数 $g \in \Sigma$ 属于 $\Sigma(\kappa)$ $(0 \leqslant \kappa \leqslant 1)$ 当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left| \sum_{l=1}^{\infty} b_{kl} \lambda_l \right|^2 \leqslant \kappa^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k|^2}{k} \quad (\lambda_k \in \mathbf{C})$$

并证明若 B 是格隆斯基算子 (3.1.26)，则

$$g \in \Sigma(\kappa) \Leftrightarrow \|B\| \leqslant \kappa.$$

2. 设 $g \in \Sigma(\kappa)$ $(0 < \kappa < 1)$. 试证拟共形曲线定义(1)中常数 κ 可以大于 $\frac{1}{2} \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$.

3. 设 $g \in \Sigma(\kappa)$. 试证明精确不等式 $|b_1| \leqslant \kappa$ 及 $\operatorname{area}(\mathbf{C} \backslash g(\Delta)) \geqslant \pi(1 - \kappa^2)$. 并证明薛瓦尔兹导数以 $\frac{6\kappa}{(|z|^2 - 1)^2}$ 为其上界 (Kühnau 1971 b, Lehto 1971).

4. 设当 $z \in \Delta$ 时 $|g'(z) - 1| \leqslant \kappa < 1$. 试写出 $g(z)$ 的一个具体的 κ-拟共形扩张以证明 $g \in \Sigma(\kappa)$.

5. 设 $f \in S$ 且

$$(1 - |z|^2)|zf''(z)/f'(z)| \leqslant \kappa < 1 \quad (|z| < 1),$$

证明 $f(D)$ 由拟共形曲线界成 (Becker 1972).

第十章　导数的边界性质

本章研究区域边界的度量性质与区域的映照函数导数的边界性质之间的关系．第一节讨论处处成立的性质，其后两节主要讨论在某个给定的边界点上的性质．最后两节则着重讨论一些几乎处处成立的性质．

10.1　光滑边界曲线

在应用上常常要用到本节所述的这些重要结果．我们在讨论这些结果时不用勒贝格理论而以普阿松积分作为我们的主要工具．

若 $h(z)$ 在 D 内解析并且调和函数 $v(z)=\operatorname{Im}h(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续，则

$$(1)\qquad h(z)=\operatorname{Re}h(0)+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}v(e^{it})dt(|z|<1)$$

（Ahlfors 167 页），因此而有（普阿松积分公式）

$$(2)\qquad v(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}v(e^{it})dt\qquad(|z|<1).$$

1．以 $w(t)$ 表示曲线 C，如果在点 $w_0=w(t_0)$ 有

$$\arg[w(t)-w_0]\to\begin{cases}\Theta & 当\ t\to t_0+0\ 时,\\ \Theta+\pi & 当\ t\to t_0-0 时,\end{cases}$$

则称曲线 C 在点 w_0 有切线；如果在 C 的每一点都具有连续迴转的切线，则称曲线 C 光滑．这些定义显然与曲线的参数表示无关．

我们来证明林特略夫的一个定理（Lindelöf 1916）；定理中的 $f(z)$ 标准化的假定其实是无关紧要的．

定理 10.1　设 $f\in S$ 且 $f(D)$ 由若当曲线 C 界成，则 $\arg f'(z)$ 具有到 $\overline{D}$ 的连续开拓当且仅当 C 是光滑曲线．并且，在这种情形

下，曲线C在点$f(e^{it})$的切线倾角为

$$(3)\qquad \Theta(t)=\frac{\pi}{2}+t+\arg f'(e^{it}).$$

证 (a) 设曲线C光滑. 因C是若当曲线故$f(z)$在$\bar{D}$连续内射(推论9.4). 因此函数

$$(4)\qquad v(z,\theta)=\arg\frac{f(e^{i\theta}z)-f(z)}{(e^{i\theta}-1)z}\qquad(0<\theta<\pi)$$

关于z在D内调和在$\bar{D}$上连续. 由(2)式它又可表为

$$(5)\qquad v(z,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}v(e^{it},\theta)dt$$

$$(|z|<1,\ 0<\theta<\pi)$$

根据假定，曲线C在点$f(e^{it})$的切线倾角$\Theta(t)$连续依赖于t. 利用C是若当曲线的假定，类似经典中值定理的证明，我们看出对于某个τ，$t<\tau<t+\theta$，有

$$\arg[f(e^{i(t+\theta)})-f(e^{it})]=\Theta(\tau).$$

故由(4)式，当$\theta\to+0$时对t一致地有$v(e^{it},\theta)\to\Theta(t)-t-\frac{\pi}{2}$. 又因对每点$z\in D$，当$\theta\to+0$时$v(z,\theta)\to\arg f'(z)$，因而从(5)式我们得到

$$(6)\qquad \arg f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\cdot\left(\Theta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt\quad(|z|<1).$$

由于$\Theta(t)-t-\frac{\pi}{2}$连续，这便推出$\arg f'(z)$具有到$\bar{D}$的连续开拓(Ahlfors 168页).

(b) 反之，设$\arg f'(z)$在$\bar{D}$连续. 曲线$C(r)=\{f(re^{it}):0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$在$f(re^{it})$的切线倾角为

$$(7)\qquad \Theta(r,t)=\arg f'(re^{it})+t+\frac{\pi}{2}.$$

同样在 t 与 $t+\theta$ 之间存在 $\tau=\tau(\theta,r)$，使得

$$\arg[f(re^{i(t+\theta)})-f(re^{it})]=\Theta(\tau(\theta,r),r)+\sigma$$
$$(0<|\theta|<\pi,\ 0<r<1),$$

其中 σ 的值当 $\theta>0$ 时为 0，当 $\theta<0$ 时为 π。因由(7)式，$\Theta(t,r)$ 在 $\{0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 1\}$ 上连续，于是对 t 与 $t+\theta$ 之间的某个 $\tau(\theta)$ 有

$$\arg[f(e^{i(t+\theta)})-f(e^{it})]=\Theta(\tau(\theta),1)+\sigma,$$

故

$$\arg[f(e^{i(t+\theta)})-f(e^{it})]\to\begin{cases}\Theta(t,1) & \text{当 } \theta\to+0 \text{ 时},\\ \Theta(t,1)+\pi & \text{当 } \theta\to-0 \text{ 时},\end{cases}$$

因此切线存在且其倾角 $\Theta(t)$ 等于 $\Theta(t,1)$ 因而连续。

我们需要斯米尔诺夫的如下结果 (Smirnov 1932)。

引理 10.1 设 $f\in S$ 且 $f(D)$ 由光滑若当曲线 C 界成，则

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^{\lambda}d\theta<\infty\quad(0<\lambda<\infty). \tag{8}$$

并且对每个 $\varepsilon>0$ 存在常数 $K(\varepsilon)$，使得对于 $0<r<1$ 及 $\theta_1<\theta_2$ 有

$$|f(re^{i\theta_2})-f(re^{i\theta_1})|\leqslant\int_{\theta_1}^{\theta_2}|f'(re^{i\theta})|d\theta \tag{9}$$
$$\leqslant K(\varepsilon)(\theta_2-\theta_1)^{1-\varepsilon}.$$

证 因由定理 10.1，$v(z)=\arg f'(z)$ 在 $\bar{D}$ 连续，根据魏尔斯特拉斯逼近定理，$v(e^{it})$ 可用三角多项式一致逼近。故可找到一个代数多项式 $p(z)$，使得对于 $z\in\bar{D}$ 有

$$|v(z)-\operatorname{Im}p(z)|$$
$$\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|v(e^{it})-\operatorname{Im}p(e^{it})|<\frac{\pi}{3\lambda}.$$

若 $M=\max|p(z)|$，则对于 $z=re^{i\theta}$，$0<r<1$ 有

$$\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\lambda}d\theta$$
$$\leqslant 2e^{\lambda M}\int_0^{2\pi}|f'(z)|^{\lambda}|e^{-\lambda p(z)}|$$

$$\cdot \cos[\lambda(v(z) - \operatorname{Im} p(z))] d\theta$$

$$= 2e^{\lambda M} \operatorname{Re}\left[\int_0^{2\pi} f'(z)^\lambda e^{-\lambda p(z)} d\theta\right]$$

$$\leqslant 4\pi e^{\lambda M} e^{-\lambda \operatorname{Re} p(0)}.$$

这就证明了(8)式，而(9)式是(8)式的一个推论，这是因为由海尔宾不等式我们有

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leqslant (\theta_2 - \theta_1)^{1-\varepsilon}$$

$$\cdot \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} |f'(re^{i\theta})|^{\frac{1}{\varepsilon}} d\theta\right)^{\varepsilon}.$$

若 $\theta_1 \leqslant t_0 < \cdots < t_n \leqslant \theta_2$，则由(9)式推知，对于 $0<r<1$ 有

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(re^{it_\nu}) - f(re^{it_{\nu-1}})| \tag{10}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} |f'(re^{it})| dt$$

$$\leqslant K(\varepsilon)(\theta_2 - \theta_1)^{1-\varepsilon}.$$

以 $s(\theta)$ 表示曲线 $\{f(e^{it}): 0 \leqslant t \leqslant \theta\}$ 的长度．因 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续，故从(10)式推出

$$s(\theta_2) - s(\theta_1) \leqslant K(\varepsilon)(\theta_2 - \theta_1)^{1-\varepsilon} \quad (\theta_1 < \theta_2). \tag{11}$$

2．函数 $\log|f'(z)|$ 与 $|f'(z)|$ 是否在 $\overline{D}$ 连续的问题与共轭函数有关（例如参看 Bary 的书第八章）．我们称若当曲线 C 为**迪尼光滑**（Dini-Smooth），如果该曲线光滑并且切线倾角 $\beta(s)$ 作为弧长 s 的函数满足

$$|\beta(s_2) - \beta(s_1)| < \omega(s_2 - s_1) \qquad (s_1 < s_2), \tag{12}$$

其中 $\omega(x)$ 是增函数且有

$$\int_0^1 \frac{\omega(x)}{x} dx < \infty. \tag{13}$$

我们来证明瓦尔沙夫斯基定理（Warschawski 1932，1961，也见 1968/69）：

定理 10.2 设 $f\in S$，若 $f(D)$ 由迪尼光滑若当曲线界成，则 $f'(z)$ 具有到 $\bar{D}$ 的连续开拓，并且 $f'(z)\neq 0$.

证 因 C 光滑，故由定理 10.1 及 (1) 式得

$$g(z)=\log f'(z)$$
$$=\log|f'(0)|+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi(t)dt \tag{14}$$
$$(|z|<1),$$

其中 $\varphi(t)=\arg f'(e^{it})$. 这就推出对于 $0<\rho\leqslant r<1$ 有

$$g(re^{i\theta})-g(\rho e^{i\theta})$$
$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2e^{it}e^{i\theta}(r-\rho)}{(e^{it}-re^{i\theta})(e^{it}-\rho e^{i\theta})}\varphi(t)dt,$$

根据留数定理，式中若无因子 $\varphi(t)$ 时相应的积分为 0. 因此经代换 $t=\tau+\theta$ 我们得到

$$|g(re^{i\theta})-g(\rho e^{i\theta})|$$
$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\rho}{|e^{i\tau}-r||e^{i\tau}-\rho|}$$
$$\cdot|\varphi(\tau+\theta)-\varphi(\theta)|d\tau.$$

为估计这个积分，我们设 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$. 因

$$|e^{i\tau}-r|\geqslant|\sin\tau|\geqslant\frac{2|\tau|}{\pi},$$
$$|e^{i\tau}-\rho|\geqslant 1-\rho\quad(|\tau|\leqslant\delta);$$
$$|e^{i\tau}-r|\geqslant\sin\delta,\ |e^{i\tau}-\rho|\geqslant\sin\delta$$
$$(\delta\leqslant|\tau|\leqslant\pi),$$

故对某个常数 $K_1(\delta)$ 有

$$|g(re^{i\theta})-g(\rho e^{i\theta})|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{\varphi(\tau+\theta)-\varphi(\theta)}{\tau}\right|d\tau+K_1(\delta)(1-\rho). \tag{15}$$

— — — — — -

若 s_1，s_2 是对应于 τ_1，τ_2 的弧长，则由 (3)，(11) 及 (12) 式有

$$
\begin{aligned}
|\varphi(\tau_2)-\varphi(\tau_1)| &\leqslant |\tau_2-\tau_1|+|\Theta(\tau_2)-\Theta(\tau_1)| \\
&\leqslant |\tau_2-\tau_1|+\omega(|s_2-s_1|) \\
&\leqslant |\tau_2-\tau_1|+\omega(K_2|\tau_2-\tau_1|^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

因而从 (15) 式便推出

$$
\begin{aligned}
&|g(re^{i\theta})-g(\rho e^{i\theta})| \\
&\leqslant \int_0^\delta \left(1+\frac{\omega(K_2\tau^{\frac{1}{2}})}{\tau}\right)d\tau + K_1(\delta)(1-\rho) \\
&= \delta + 2\int_0^{K_2\sqrt{\delta}} \frac{\omega(x)}{x}\,dx + K_1(\delta)(1-\rho).
\end{aligned}
$$

由 (13) 式，我们可选定 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 然后选取 $\rho_0(\varepsilon)$，使得

$$
|g(re^{i\theta})-g(\rho e^{i\theta})|<\varepsilon
$$

$$
(\rho_0<\rho<r<1, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).
$$

因此 $g(e^{i\theta})=\lim\limits_{r\to 1-0} g(re^{i\theta})$ 关于 θ 一致地存在，这就确定了 $g(z)=\log f'(z)$ 到 $\overline{D}$ 的一个连续开拓．于是 $f'(z)$ 具有到 $\overline{D}$ 的连续开拓且不取零值．

为了说明我们可以搬用李普希兹条件，先证明哈代和李特伍德的一个引理．

引理 10.2 设 $h(z)$ 在 D 内解析且 $v(z)=\operatorname{Im} h(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续．若对某个 $0<\alpha<1$ 及某个常数 K_1 有

$$
(16)\qquad |v(e^{it_2})-v(e^{it_1})|\leqslant K_1|t_2-t_1|^\alpha \quad (t_1, t_2\in\mathbb{R}).
$$

则

$$
(17)\qquad |h(z_2)-h(z_1)|\leqslant K_2|z_2-z_1|^\alpha \quad (z_1, z_2\in D).
$$

证 微分 (1) 式即得

$$
h'(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\,v(e^{it})\,dt,
$$

式中若无因子 $v(e^{it})$ 时相应的积分为 0．故有

$$
|h'(re^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|v(e^{it})-v(e^{i\theta})|}{|e^{it}-re^{i\theta}|^2}\,dt.
$$

经代换 $t=\vartheta+\tau$，从(16)式得到

$$|h'(re^{i\vartheta})|\leqslant\frac{2K_1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tau^{\alpha}}{|e^{i\tau}-r|^2}\,d\tau<K_3(1-r)^{\alpha-1};$$

最后的估计式是通过分别考虑在两个区间 $[0,1-r]$ 和 $[1-r,\pi]$ 内的积分而得到的。令 $\rho=1-\frac{1}{3}|z_1-z_2|$ $(z_1,z_2\in D)$，便可推出

$$(18)\qquad \begin{aligned}|h(z_2)-h(z_1)|&=\left|\int_{\rho z_2}^{z_2}h'(z)dz+\int_{\rho z_1}^{\rho z_2}h'(z)dz+\int_{z_1}^{\rho z_1}h'(z)dz\right|\\&\leqslant 2K_3\int_\rho^1(1-r)^{\alpha-1}dr+K_3|z_2-z_1|(1-\rho)^{\alpha-1}\\&\leqslant K_2|z_2-z_1|^{\alpha}.\end{aligned}$$

推论 10.1 在定理 10.2 的假定下，设对于某个 $0<\alpha<1$ 及某常数 K_1 有

$$(19)\qquad \beta(s_2)-\beta(s_1)\leqslant K_1(s_2-s_1)^{\alpha}\quad(s_1<s_2).$$

则

$$(20)\qquad |f'(z_2)-f'(z_1)|\leqslant K_2|z_2-z_1|^{\alpha}\quad(z_1,z_2\in\overline{D}).$$

证 仍设 $v(z)=\arg f'(z)$。因对于 $t_2>t_1$，

$$s_2-s_1\leqslant(t_2-t_1)\max_{t_1\leqslant t\leqslant t_2}|f'(e^{it})|,$$

故从(3)与(19)式推出

$$\begin{aligned}|v(e^{it_2})-v(e^{it_1})|&\leqslant(t_2-t_1)+K_1(s_2-s_1)^{\alpha}\\&\leqslant K_3(t_2-t_1)^{\alpha}.\end{aligned}$$

因而引理 10.2 表明

$$|\log f'(z_2)-\log f'(z_1)|\leqslant K_4|z_2-z_1|^{\alpha},$$

又由于有 $|e^a-e^b|\leqslant|a-b|e^{|a|+|b|}$，知上式蕴含着(20)式。

3. 对于高阶导数，类似结果也成立。我们限于考虑二阶导数的情形。设 C 是光滑若当曲线，$\beta(s)$ 作为弧长的函数表示曲线上切线倾角。我们说 C 具有迪尼连续曲率，如果 $\beta'(s)$ 连续并且

(21) $$|\beta'(s_2)-\beta'(s_1)|\leqslant\omega_1(s_2-s_1)\quad(s_1<s_2),$$
其中 $\omega_1(x)$ 为增函数且满足

(22) $$\int_0^1\frac{\omega_1(x)}{x}dx<\infty.$$

下一个定理属于凯洛格与瓦尔沙夫斯基 (Kellogy and Warschawski 1932):

定理 10.3 设 $f\in S$，若 $f(D)$ 由具有迪尼连续曲率的若当曲线所界成，则 $f''(z)$ 具有到 $\bar{D}$ 的连续开拓.

证 因 $\beta'(s)$ 连续，推论 10.1 表明对某个常数 K_1 有

$$|f'(z_2)-f'(z_1)|\leqslant K_1|z_2-z_1|^{\frac{1}{2}}.$$

若 $\varphi(t)=\arg f'(e^{it})$，则由 (3) 式有

$$\beta(s)=\varphi(t)+t+\frac{\pi}{2},$$

$$\beta'(s)|f'(e^{it})|=\varphi'(t)+1.$$

因此由 (21) 式有

(23) $$\begin{aligned}|\varphi'(t_2)-\varphi'(t_1)|&\leqslant|\beta'(s_2)-\beta'(s_1)||f'(e^{it_1})|\\&\quad+\beta'(s_2)(|f'(e^{it_2})|-|f'(e^{it_1})|)\\&\leqslant K_2\omega_1(K_3(t_2-t_1))+K_4(t_2-t_1)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

微分 (14) 式然后分部积分便得到

$$\begin{aligned}\frac{f''(z)}{f'(z)}&=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\varphi(t)dt\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi'(t)}{e^{it}-z}dt.\end{aligned}$$

类似定理 10.2 的证明，从 (22) 与 (23) 式推知 $f''(z)/f'(z)$ 具有到 $\bar{D}$ 的连续开拓.

问　　题

1. 设单叶函数 $f(z)$ 把 D 映照成一条光滑若当曲线的内区域 H. 试证明 $f(z)$ 能开拓为 $\bar{D}$ 到 $\bar{H}$ 的共形同胚；即把光滑曲线变为光滑曲线且保持角度不变.

2. 设 $h(z)$ 把 D 映照成正方形 $\{0<u<1,\ 0<v<1\}$ 减去一列线段 $\left[\frac{i}{2n}, 1-\frac{1}{n}+\frac{i}{2n}\right]$ 与 $\left[\frac{1}{n}+\frac{i}{2n+1}, 1+\frac{i}{2n+1}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$ 所得的区域. 试证明：函数

$$f(z)=\int_0^z \exp h(\zeta)d\zeta \quad (|z|<1)$$

把 D 一一映照为一条光滑若当曲线的内区域。并证明：然而在 ∂D 上某点 $|f'(z)|$ 不存在有穷或无穷的角极限.

3. 设 F 是迪尼光滑若当曲线 C 的内区域，$\phi(z)$ 是 C 上实值连续函数满足

$$\int_C \phi(z)|dz|=0.$$

试证明存在 F 内调和函数 $u(z)$，它的一阶偏导数在 $\bar{F}$ 连续，且对 $z\in C$ 其法微商为 $\phi(z)$（诺伊曼问题）. 并证明若 $C=\{|z|=1\}$，则

$$u(z)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(e^{it})\log|e^{it}-z|\,dt+\text{const}.$$

4. 设 $g\in\Sigma$，$g(\Delta)$ 是一条满足(19)式的光滑若当曲线的外区域，其中 $\alpha>\frac{1}{2}$. 试证明格隆斯基系数(见 3.1 节)满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}k^2|b_{kl}|^2<\infty,$$

并证明格隆斯基算子是紧的 (Pommerenke 1969b).

10.2 角微商

1. 现在转向研究导数在给定点 $\zeta\in\partial D$ 的性质。仍可假定 $f\in S$. 我们的第一个定理是属于林特略夫的 (Lindelöf 1916).

定理 10.4 设 $f\in S$ 且 $f(D)$ 由若当曲线 C 界成，则极限

$$\lim_{z\to\zeta,\, z\in D}\arg\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} \quad (\zeta\in\partial D) \tag{1}$$

存在当且仅当 C 在点 $f(\zeta)$ 有切线.

证 因由推论 9.4，$f(z)$ 在 $\bar{D}$ 连续内射，故可选取 $f(e^{it})$ 作为

C的参数表示式．显然极限(1)存在蕴含切线存在．

反之，设C在点$f(\zeta)$有切线，则函数

$$(2) \qquad v(z)=\arg\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

在$\bar{D}\setminus\{\zeta\}$连续而且有界，这是因为可以用$\hat{\mathbb{C}}\setminus f(D)$内有限条线段连接$f(\zeta)$与$\infty$．应用逼近方法可以证明普阿松积分表示式(10.1.2)在此情况下仍成立．根据定理假定，函数$v(e^{it})(t\in\mathbb{R})$在$t=\arg\zeta$也连续．因此，(10.1.2)式表明$v(z)$在$\bar{D}$连续(Ahlfors 168页)，故极限(1)存在．

设$f(z)$在D内解析单叶．我们说$f(z)$在点$\zeta\in\partial D$**共形**，如果有限角极限

$$(3) \qquad f(\zeta)=\lim_{z\to\zeta,z\in A}f(z)$$

$$(4) \qquad \alpha=\lim_{z\to\zeta,z\in A}\arg\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

存在(见9.1节)；所谓角极限，即在ζ点的每个施笃兹角

$$(5) \qquad A=\left\{z\in D:|\arg(1-\bar{\zeta}z)|<\frac{\pi}{2}-\delta\right\}$$

$$\left(0<\delta<\frac{\pi}{2}\right)$$

内趋近于ζ点时的极限．这与我们在定理10.4中所考虑的不加限制的趋近不同．

设$f(z)$在ζ共形；假定Γ是除端点ζ外皆位于D内的光滑弧段，且Γ在端点ζ处不与∂D相切．于是Γ位于某个施笃兹角内．故由(4)式，

$$(6) \qquad \lim_{z\to\zeta,z\in\Gamma}\arg[f(z)-f(\zeta)]=\alpha+\lim_{z\to\zeta,z\in\Gamma}\arg(z-\zeta).$$

因此，$f(\Gamma)$也是一条光滑曲线，并且两曲线间的角度保持不变．

设$H\subset D$是若当区域，它被光滑若当弧Γ_1，Γ_2和Γ_3所界，其中Γ_1，Γ_2两弧仅交于ζ点且与线段$\Gamma_0=[0,\zeta]$的交角γ_1，

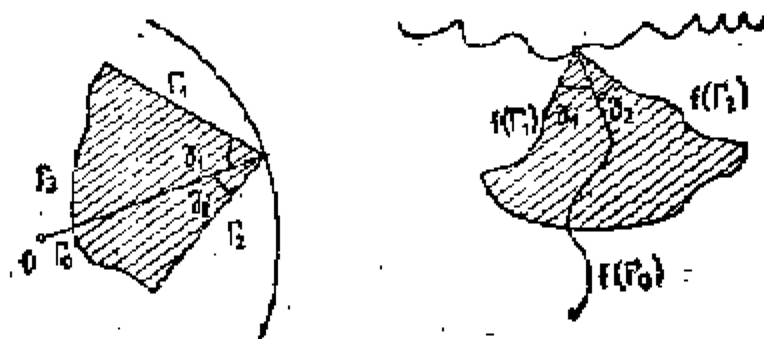


图 10.1

$\gamma_2 < \frac{\pi}{2}$；弧 Γ_3 连接 Γ_1，Γ_2 的另一端（见图 10.1）。因 H 位于 ζ 的某个施笃兹角内，故推知当 $z \in H$，$z \to \zeta$ 时 $f(z) \to f(\zeta)$。因此，$f(H)$ 是由 $f(\Gamma_1) \cup f(\Gamma_2) \cup f(\Gamma_3)$ 界成的若当区域。由于共形性，$f(H)$ 与 H 属于同一类型：光滑弧段 $f(\Gamma_j)(j=1,2)$ 与光滑弧段 $f(\Gamma_0)$ 的交角为 γ_j。

奥斯特洛夫斯基（Ostrowski 1936）已经从几何上给出了共形性的一个充要条件（也见 Ferrand 1942）。顺便指出，关于 $f(\zeta)$ 在内角为 2π（$0 < \alpha \leqslant 2$）的象域角点邻近的性质的研究可以经辅助映照 $w^* = [w - f(\zeta)]^{\frac{1}{\alpha}}$ 化成如上所述的问题。

下面的例子表明，一个单叶函数可以在任何边界点上都不共形：

例 10.1 设 $f(z)$ 由等式

$$\log f'(z) = ib \sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k} \tag{7}$$

确定，其中常数 $b > 0$ 将按如下条件选定：若 $|z| = r < 1$，则

$$\frac{r}{1-r}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant b \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{k=0}^{\infty} 2^k r^{2^k}$$

$$= b \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{2^k \leqslant n} 2^k\right) r^n$$

$$\leqslant 2b\sum_{n=1}^{\infty} n r^n = \frac{2br}{(1-r)^2}.$$

因此有

(8) $$(1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 4b \quad (|z|<1).$$

由定理 6.7 (6.3 节)知，取 $b<\frac{1}{4}$ 时 $f(z)$ 单叶. 而根据 9.4 节问题 5，$\partial f(D)$ 是一条拟共形若当曲线.

现证明 $f(z)$ 在边界上无处共形. 我们要用到关于具有阿达玛间断条件的缺项级数的陶伯尔定理 (Hardy and Littlewood 1926, Binmore 1969)：若函数

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{n_k} \quad \left(\frac{n_{k+1}}{n_k}>\lambda>1\right)$$

在某个点 $\zeta\in\partial D$ 具有有限径向极限，则 $b_k\to 0\ (k\to\infty)$.

假定 $f(z)$ 在 $e^{i\theta}$ 共形，则函数

(9) $$\arg f'(re^{i\theta}) = b\sum_{k=0}^{\infty} r^{2^k}\cos(2^k\theta)$$

当 $r\to 1-0$ 时具有有限极限(见问题 2). 应用陶伯尔定理于该级数 (r 代之以 z)，我们断定当 $k\to\infty$ 时 $\cos(2^k\theta)\to 0$. 但这对任何 θ 都是不可能的，因为 $\cos(2^{k+1}\theta)=2\cos^2(2^k\theta)-1$.

2. 我们说 D 内解析函数 $f(z)$ 在 $\zeta\in\partial D$ 具有(有限)**角微商** a，如果对于 ζ 点的每个施笃兹角 Δ 有

(10) $$f'(z)\to a\neq\infty \quad 当\ z\to\zeta,\ z\in\Delta.$$

若 $f(z)$ 在 ζ 的角微商存在，我们常用 $f'(\zeta)$ 表示之. 这一段，我们要用到在 9.1 节中证明过的关于正规函数的一些结果. $f(z)$ 在 ζ 的角微商 $f'(\zeta)$ 存在蕴含 f 在该点的径向极限存在，且

$$f(\zeta)=\zeta\int_0^1 f'(r\zeta)\,dr\neq\infty.$$

而由于 $f(z)$ 正规，这个径向极限也就是角极限.

定理 10.5 设 $f\in S$ 在 $\zeta\in\partial D$ 具有有限角极限 ω，并假定

$a\in\mathbf{C}$，则下列命题等价：

(i) $f(z)$ 在 ζ 点有角微商 a；

(i′) $f'(z)$ 在 ζ 点有渐近值 a；

(ii) $\dfrac{f(z)-\omega}{z-\zeta}$ 在 ζ 点有角极限 a；

(ii′) $\dfrac{f(z)-\omega}{z-\zeta}$ 在 ζ 点有渐近值 a。

(ii) 的一个直接推论是：非零角极限的存在性蕴含着共形性。

证 (a) 首先证明

$$(11)\qquad h(z)=\log[(f(z)-\omega)/(z-\zeta)]$$

是布洛赫函数(见 9.1 节)。因 $f(z)\neq\omega$，函数

$$g(z)=\omega f(z)/(\omega-f(z))=z+\cdots\quad(|z|<1)$$

仍属于 S。寇勃偏差定理 (1.2.13) 表明

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)-\omega}\right|=\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{zg'(z)}{g(z)}\right|$$

$$\leqslant 2\frac{1+|z|}{1-|z|}\quad(|z|<1)。$$

从而对于 $\frac{1}{2}\leqslant|z|<1$ 有

$$(1-|z|^2)|h'(z)|=(1-|z|^2)\left|\frac{f'(z)}{f(z)-\omega}-\frac{1}{z-\zeta}\right|$$

$$\leqslant 8|z|^{-1}+2\leqslant 18。$$

故由 (9.1.25) 式，$h(z)$ 是布洛赫函数．于是函数

$$(f(z)-\omega)/(z-\zeta)=\exp h(z)$$

正规．因此由定理 9.3 知 (ii) $\Longleftrightarrow$ (ii′)；又由于 $f'(z)$ 也是正规函数(引理 9.3)，故 (i) $\Longleftrightarrow$ (i′)。

(b) 不妨设 $\zeta=1$．若命题 (i) 成立，则

$$\frac{f(1)-f(r)}{1-r}=\int_0^1 f'(r+(1-r)t)\,dt$$

$$\to a\quad(r\to 1-0)。$$

故命题(ii′)成立，并以线段 $[0, 1]$ 为渐近路径。

最后，设命题(ii)成立。若 $r_n \to 1-0$ 则在闭圆盘 $|s| \leqslant \frac{1}{2}$ 内一致地有

$$g_n(s) = \frac{1}{1-r_n}[f(r_n + (1-r_n)s) - \omega]$$
$$\to a(s-1) \quad (n \to \infty).$$

因而

$$g_n'(0) = f'(r_n) \to a \quad (n \to \infty).$$

这便推知当 $r \to 1-0$ 时 $f'(r) \to a$，故(i′)成立。

我们需要下面的茹利亚(Julia)与沃尔夫(Wolff)引理：

引理 10.3 设 $\varphi(z)$ 在 D 内解析且 $|\varphi(z)| < 1$，并假定 $x \to 1-0$ 时 $\varphi(x) \to 1$。则

$$\frac{1-\varphi(x)}{1-x} \to \alpha \quad (x \to 1-0), \tag{12}$$

其中 $0 < \alpha \leqslant +\infty$ 是使得

$$\frac{|1-\varphi(z)|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leqslant \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \quad (|z| < 1) \tag{13}$$

成立的最小值。

证 函数

$$h(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} \tag{14}$$

在 D 内解析并且满足

$$\mathrm{Re}\,h(z) = \frac{1-|\varphi(z)|^2}{|1-\varphi(z)|^2} \geqslant 0 \quad (|z| < 1). \tag{15}$$

由 α 的定义，存在点列 (z_n) 使得

$$\frac{|1-z_n|^2}{1-|z_n|^2}\mathrm{Re}\,h(z_n) \to \frac{1}{\alpha} \quad (n \to \infty). \tag{16}$$

解析函数

$$h_n(s) = \left[h\left(\frac{s+z_n}{1+\bar{z}_n s}\right) - i\,\mathrm{Im}\,h(z_n)\right]$$

$$\cdot [\operatorname{Re} h(z_n)]^{-1} \quad (|s| < 1)$$

满足 $\operatorname{Re} h_n(s) > 0$，$h_n(0) = 1$，故由 (2.1.11) 式有

$$|h_n(s)| \leqslant (1 + |s|)/(1 - |s|) \leqslant 4/(1 - |s|^2).$$

取 $s = (x - z_n)/(1 - \bar{z}_n x)$ $(0 < x < 1)$ 则得

$$\left|\frac{h(x) - i\operatorname{Im} h(z_n)}{\operatorname{Re} h(z_n)}\right| \leqslant \frac{4|1 - \bar{z}_n x|}{(1 - |z_n|^2)(1 - x^2)}.$$

这就推出

$$\lim_{x \to 1-0} \sup \frac{1 - x}{1 + x} |h(x)| \leqslant \frac{|1 - z_n|^2}{1 - |z_n|^2} \operatorname{Re} h(z_n).$$

若令 $n \to \infty$，则由 (16) 式得到

$$(17) \qquad \lim_{x \to 1-0} \sup \frac{1 - x}{1 + x} |h(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

但由 (13) 与 (15) 式，

$$\frac{1 - x}{1 + x} \operatorname{Re} h(x) \geqslant \frac{1}{\alpha},$$

故从 (17) 式我们断定

$$\frac{1 - x}{1 + x} h(x) \to \frac{1}{\alpha} \quad (x \to 1 - 0);$$

并且由于 $\varphi(x) \to 1$，从 (14) 式便推出 (12) 式。

我们来证明卡拉西屋多利与莱朗-菲尔兰德 (Lelong-Ferrand) 的比较定理：

定理 10.6 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在 D 内解析单叶，并且

$$(18) \qquad f(D) \subset g(D).$$

假定存在以 $\zeta \in \partial D$ 为端点的若当弧 Γ 使得当 $z \to \zeta (z \in \Gamma)$ 时

$$(19) \qquad \varphi(z) = g^{-1}(f(z)) \to \zeta,$$

则若 $f'(\zeta)$ 存在，$g'(\zeta)$ 也必存在；且 $f'(\zeta) = 0$ 蕴含 $g'(\zeta) = 0$。

证 不妨设 $\zeta = 1$。由(18)式，函数 $\varphi(z)$ 满足 $|\varphi(z)| < 1$，因而正规。故由 (19) 及定理 9.3 推知当 $x \to 1 - 0$ 时 $\varphi(x) \to 1$。若 $f'(1) \neq \infty$ 存在，则由引理 10.3 及定理 10.5(ii)，

$$\frac{g(1)-g(\varphi(x))}{1-\varphi(x)}=\frac{1-x}{1-\varphi(x)}\cdot\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$$

$$\to\frac{1}{\alpha}f'(1)\quad(x\to 1-0).$$

其中 $0\leqslant\frac{1}{\alpha}<\infty$。因此 $(g(1)-g(x))/(1-x)$ 沿 $\{\varphi(x);0\leqslant x<1\}$ 具有渐近值 $\frac{1}{\alpha}f'(1)\neq\infty$，于是由定理 10.5(ii′) 便知 $g'(1)=\frac{1}{\alpha}f'(1)$ 存在。显然 $f'(1)=0$ 蕴含 $g'(1)=0$。

推论 10.2 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，Γ 是以 ζ 为端点的若当弧，使得当 $z\to\zeta(z\in\Gamma)$ 时有 $f(z)\to\omega\neq\infty$。若存在过 ω 的迪尼光滑若当曲线 C_1 其内区域位于 $f(D)$ 中且包含 $f(\Gamma)$，则 $f'(\zeta)$ 存在。进而若存在过 ω 的另一条迪尼光滑若当曲线 C_2 不与 $f(D)$ 相交，则 $f'(\zeta)\neq 0$（图 10.2）。

比如，在 ω 邻近若 $f(D)$ 的边界位于在 ω 相切的两个圆周之间，则 $f'(\zeta)$ 存在且不等于零。

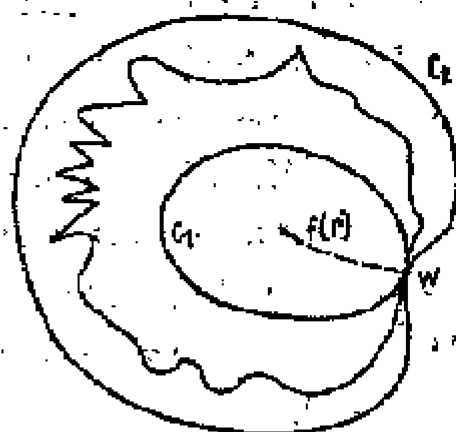


图 10.2

证 设 $f_1(z)$ 把 D 映照成 C_1 的内区域使得 $f_1(\zeta)=\omega$，则由定理 10.2，$f_1(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续。因 $f_1(D)\subset f(D)$ 并且 $\Gamma_1=f_1^{-1}(f(\Gamma))$ 满足(19)式（f、g 分别代之以 f_1，f），故由定理 10.6 知 $f'(\zeta)$ 存在。

现在假定关于 C_2 的假设条件成立。不妨设 $f(D)$ 位于 C_2 的内区域中；$f(D)$ 位于 C_2 外区域的情形可经莫比乌斯变换化为前者。设 $f_2(z)$ 把 D 映照为 C_2 的内区域使得 $f_2(\zeta)=\omega$，则由定理 10.2 有 $f_2'(\zeta)\neq 0$。因 Γ 满足(19)式 $(g=f_2)$，故从定理 10.6 推出 $f'(\zeta)\neq 0$。

角微商的存在性问题尚未完全解决；比如可参看 Tsuji 366 页。

Eke 1967，Warschawski 1968 与 1971，Carleson 1967，Jenkins and Oikawa 1970.

对于进一步的有关结果参见莱朗-菲尔兰德的书及嘎纬格诺与奥斯特洛夫斯基和麦克米伦的综述性论文（Gattegno and Ostrowski 1949a，b，McMillan 1970）.

3. 最后我们证明一个角微商存在定理（Hall 1968，McMillan and Pommerenke 1970，Lohwater 1971）. 如果 ∂D 的每段弧均包含 A 中不可数个点，则称集 $A\subset\partial D$ 为 ∂D 的**不可数稠密子集**. 因为有比如伯格米尔的歧点定理，使得在一个不可数稠密子集上渐近值的存在性也具有某些意义（例如可见 Collingwood-Lohwater 85 页；也见 McMillan 1966）.

定理 10.7 **每个解析单叶函数必在 ∂D 的某个不可数稠密子集上存在角微商.**

在例 10.1 中已知，函数可以在任何边界点都不共形. 在这种情形，所有的角微商必为 0.

证 设 A 是 ∂D 上一段开弧. 我们分别两种情形讨论之：

(i) 设函数 $1/f'(z)$ 在 A 的某个闭子弧 A' 上有界. 对 A' 的某邻域应用法都（Fatou）定理及黎斯（Riesz）唯一性定理（Collingwood-Lohwater 17 页，22 页），推出 $1/f'(z)$ 在 A' 上几乎处处有非零角极限，即在一个不可数点集上有有限角极限.

(ii) 设函数 $1/f'(z)$ 在 A 的每个子弧上无界. 则存在序列 (z_n)，$z_n\to\zeta_0\in A$ 使得 $f'(z_n)\to 0\ (n\to\infty)$. 考虑布洛赫函数

(20) $$g(z)=\log f'(z)\quad(z\in D)$$

（见定理 9.4）. 可假定 $g'(z_n)\neq 0$；否则对 z_n 稍加变动即可.

把 $g(z_n)$ 看成象黎曼曲面 $g(D)$（$\mathbb{C}$ 的覆盖曲面）上的一点，$g'(z_n)\neq 0$，它不是一个分支点. 设 $R_n(\tau)$ 是黎曼面上从点 $g(z_n)$ 出发沿 τ 方向的最长半开直线段；我们不考虑会碰到某个分支点的那可数多个方向. 因 $R_n(\tau)$ 是最长线段而知 $\Gamma_n(\tau)=g^{-1}(R_n(\tau))\subset D$ 是从 z_n 到 ∂D 的一段弧. 由于当 $z\in\Gamma_n(\tau)$，$|z|\to 1$ 时，$g(z)$ 趋向一个极限（可能为∞），故由推论 9.2 知弧 $\Gamma_n(\tau)$ 有确定

的终端，比如说是 $\zeta_n(\tau)\in\partial D$.

对所有满足 $\frac{\pi}{2}<\tau<\frac{3\pi}{2}$ 的 τ，我们有

$$(21)\qquad \max_{z\in\Gamma_n(\tau)} \operatorname{Re} g(z)=\operatorname{Re} g(z_n)$$

$$=\log|f'(z_n)|\to-\infty\quad(n\to\infty).$$

因布洛赫函数正规，故对于值∞无逗留弧（见推论 9.1），因此从 (21) 式推知当 $n\to\infty$ 时 $\zeta_n(\tau)\to\zeta$，且关于 τ 为一致收敛. 因而对于某个 n 及所有容许的 τ 有 $\zeta_n(\tau)\in A$.

由于存在不可数个容许的 τ，假如能证明当 $\tau\neq\tau'$ 有 $\zeta_n(\tau)\neq\zeta_n(\tau')$，定理的证明也就完成了.

因函数 $g(z)$ 正规，故在任何给定的边界点至多有一个渐近值（见定理 9.3）；不过，显然要除去 $R_n(\tau)$ 和 $R_n(\tau')$ 都伸向∞的情形. 在这种情形，我们设 $\tau<\sigma<\tau'$，

$$h(z)=\exp[ie^{-i\sigma}(g(z)-g(z_n))].$$

因 $(1-|z|^2)h^{\#}(z)\leqslant\frac{1}{2}(1-|z|^2)\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right|=\frac{1}{2}(1-|z|^2)\cdot|g'(z)|$，故函数 $h(z)$ 是正规的. 映照 $w\mapsto ie^{-i\sigma}(w-g(z_n))$ 把 $R_n(\tau)$ 和 $R_n(\tau')$ 分别变成指向右半平面和左半平面的半直线. 从而 $h(z)$ 沿着 $\Gamma_n(\tau)$ 和 $\Gamma_n(\tau')$ 有两个不同的渐近值∞和 0. 这就推出 $\zeta_n(\tau)\neq\zeta_n(\tau')$.

问　　题

假定函数 $f(z)$ 在 D 内解析单叶.

1. 试证明：任给 $w\in\partial f(D)$，至多存在两个点 $\zeta\in\partial D$ 满足 $f(\zeta)=w$，且函数 $f(z)$ 在这两个点共形.

2. 设 $f(z)$ 在点 $\zeta\in\partial D$ 有角极限 $f(\zeta)$. 试证明：

$$\arg[(f(z)-f(\zeta))/(z-\zeta)]$$

在 ζ 有角极限 β 当且仅当 $\arg f'(z)$ 也有角极限 β.

3. 设 $\partial f(D)$ 是一条逐段光滑的若当曲线，点 $f(\zeta)$ 是这条曲线上的一个内角为 $\alpha\pi(0<\alpha\leqslant2)$ 的角点. 试证明：$f(z)$ 把包含于 D 且以 ζ 为端点的

光滑曲线映照成光滑曲线，并且把两条这样的曲线的交角乘以 α 倍。进而证明：若 $\alpha>1$ 则 $f(z)$ 在 ζ 点有角微商，若 $\alpha<1$，则没有(有限)角微商。

4. 不用定理 10.7，试应用推论 10.2 证明在 ∂D 的某个稠密子集(可以是可数的)上 $f(z)$ 的角微商存在。

5. 设 $C \subset D$ 是一条伸向 ∞ 的若当弧，它包含于某个半带域之中，且假定 $f(1)=\infty$。试应用推论 10.2 和一个辅助映照证明：当 z 在每个施笃兹角内趋于 1 时，

$$|(1-z)^2 f(z)| \to b \neq 0.$$

故 $f(z)$ 具有最大增长(见 5.3 节)。

10.3 长度的偏差

1. 以 $\text{mes}E$ 表示 $\mathbb{R}$ 上及单位圆周 ∂D 上的集 E 的勒贝格测度。

定理 10.8 设 $f\in S$，则对于 $\varepsilon>0$ 存在集 $E=E(f,\varepsilon)\subset\partial D$，$\text{mes}E<\varepsilon$，使得

(1)
$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|dr < K(\varepsilon) \quad \theta \notin E,$$[1]

其中 $K(\varepsilon)$ 仅依赖于 ε。

证 以

$$f^{\#}(z)=\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

表示函数 $f(z)$ 的球面导数。对于 $0<\rho<1$ 及 $\eta>0$，设 E_1 是满足

(2)
$$\int_\rho^1 f^{\#}(re^{i\theta})dr > \eta$$

的 θ 的集，$B_1=\{re^{i\theta}:\ \rho\leqslant r<1,\ \theta\in E_1\}$。由薛瓦尔兹不等式有

$$\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}\int_E\left(\int_\rho^1 f^{\#}(re^{i\theta})dr\right)^2 d\theta$$

1) 为了简便，作为 ∂D 子集的记号 E，同时也表示它所对应的 θ 的集。——译者注

$$\leqslant \int_E \int_\rho^1 f^{\#}(re^{i\theta})^2 r\,dr\,d\theta - \iint_{E'} f^{\#}(z)^2 d\Omega$$

$$- \iint_{f(E_1)} \frac{d\Omega}{(1+|w|^2)^2} \leqslant \pi;$$

其中由于 $f(z)$ 单叶可以作代换 $w = f(z)$。因此从 (2) 式推出 $\eta^2 \mathrm{mes} E_1 < \pi \log \frac{1}{\rho}$，且适当选取 $\rho = \rho(\varepsilon)$ 就有 $\mathrm{mes} E_1 < \frac{\varepsilon}{2}$。

再设 E_2 是满足

$$(3) \qquad |f(\rho e^{i\theta})| > \exp \frac{20}{\varepsilon}$$

的 θ 的集。由寇勃偏差定理，函数

$$u(z) = \log^+ |4z^{-1} f(z)| \quad (z \in D)$$

正调和。因此从 (3) 式得到

$$\frac{20}{\varepsilon} \mathrm{mes} E_2 \leqslant \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi u(0) = 2\pi \log 4 \leqslant 10,$$

故 $\mathrm{mes} E_2 < \frac{\varepsilon}{2}$。

于是集 $E = E_1 \cup E_2$ 满足 $\mathrm{mes} E < \varepsilon$。由 (2) 和 (3) 式我们断定：若选取 $\eta = \eta(\varepsilon)$ 充分小，则对于 $\theta \in E$，$\rho \leqslant r < 1$，点 0 和 $f(re^{i\theta})$ 的球面距离

$$\leqslant \eta + \tan^{-1}\left(\exp \frac{20}{\varepsilon}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

故

$$|f(re^{i\theta})| < K_1 = K_1(\varepsilon) \quad (\theta \in E,\ \rho \leqslant r < 1),$$

因此从 (2) 式推知对于 $\theta \in E$，

$$\int_\rho^1 |f'(re^{i\theta})| dr \leqslant (1 + K_1^2) \int_\rho^1 f^{\#}(re^{i\theta}) dr \leqslant K_2.$$

而由寇勃偏差定理，对于 $|z| \leqslant \rho$ 有 $|f(z)| \leqslant K_3$，因此便得到 (1)式。

2. 为了给出上段定理的一个在共形映照下不变的形式，我们引入调和测度的概念。设 $z_0 \in D$，A 是 ∂D 的一个可测子集，D 到

自身的麦比乌斯变换

(4) $$\varphi(z)=\frac{cz+z_0}{1+\bar{z}_0cz}\quad(|c|=1)$$

把 0 映为 z_0，定义 A 在 z_0 的调和测度 $\omega(z_0, A)$ 为

(5) $$\omega(z_0, A)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{meas}\varphi^{-1}(A);$$

该定义显然与 c 无关.

调和测度有简单的几何解释：假定 A 是由 ∂D 的有限条弧组成，则 $\varphi^{-1}(A)$ 也是有 ∂D 的有限条弧组成，并且这些弧确定以 0 为顶点的一些扇形，根据定义这些扇形的总角度为 $2\pi\omega(z_0, A)$。变换(4)把这些扇形映照成由 A 的弧段同过 z_0 的非欧线段围成的曲边扇形(见图 10.3)，这些扇形在 z_0 点的总角度仍为 $2\pi\omega(z_0, A)$；所谓非欧线段是指 D 内与 ∂D 正交的那些圆周上的弧段。

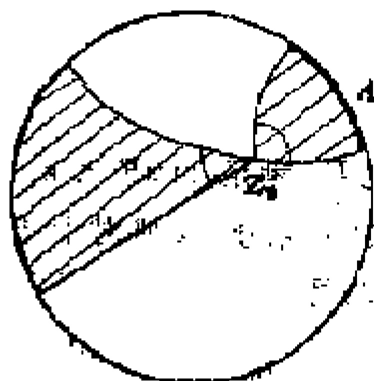


图 10.3

若 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，我们定义 $d(w)$ 为 w 到象域边界的(欧氏)距离：

(6) $$d(w)=d_f(w)=\operatorname{dist}(w, \partial f(D))\quad(w\in f(D)).$$

已知 (1.2 节推论 1.4) 有

(7) $$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant d(f(z))\leqslant(1-|z|^2)|f'(z)|\quad(z\in D).$$

推论 10.3 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，若 $z_0\in D$，$A\subset\partial D$ 并且

(8) $$\omega(z_0, A) \geqslant \alpha > 0,$$
则存在从 z_0 到 A 的非欧线段 C，使得

(9) $$\int_C |f'(z)||dz| \leqslant K(\alpha)d(f(z_0)) \leqslant K(\alpha)(1-|z_0|^2)|f'(z_0)|.$$

其中 $K(\alpha)$ 仅依赖于 α。

证 将定理 10.8 应用于 1.2 节中已考虑过的Koebe变换

(10) $$\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(0))}{\varphi'(0)f'(\varphi(0))} = z + \cdots \quad \in S,$$

其中的函数 $\varphi(z)$ 由(4)式定义，满足 $|\varphi'(0)| = 1-|z_0|^2$。并且把每个径向线段 $[0, e^{i\theta}]$ 映照成从 z_0 到 ∂D 的非欧线段。故从(1)和(7)式推出(9)式。

调和测度可表示成普阿松积分

(11) $$\omega(z_0, A) = \frac{1}{2\pi}\int_A \frac{1-|z_0|^2}{|e^{it}-z_0|^2}\,dt;$$

事实上，作代换(4)该积分便成为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi^{-1}(A)} \frac{1-|z_0|^2}{|\varphi(z)-z_0|^2}|\varphi'(z)||dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi^{-1}(A)} |dz| = \frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}\varphi^{-1}(A).$$

从(11)式推知 $\omega(z, A)$ 是 $z \in D$ 的调和函数。由普阿松积分的性质可以证明：$\omega(z, A)$ 在 A 的几乎一切点具有角极限 1，而在 $\partial D/A$ 的几乎一切点具有角极限 0；于是有界调和函数 $\omega(z, A)$ 可由这唯一一性质而确定。

调和测度概念可推广到相当一般的区域。若区域 G 单连通，A 是其边界上的一个子集，则调和测度定义为

(12) $$\omega(z_0, A, G) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}\varphi^{-1}(A)$$

其中 $\varphi(z)$ 是把 D 映照为 G 且使 $\varphi(0) = z_0$ 的单叶函数。我们可以把 A 理解为卡氏边界上的一个集合即素端的集（见 9.2节）；若 ∂G 在球面度量下局部连通，则 A 可视为 ∂G 的一个通常的子集。

对于多连通区域，$\omega(z, A, G)$ 定义为满足 $0 \leqslant \omega \leqslant 1$ 的调和函数，按照某种适当的意义，它在 A 上具有边值 1，在 $\partial G \backslash A$ 上具有边值 0。

我们将几乎不使用调和测度，而是提一提比如由尼凡林那，戈鲁辛和阿尔福斯（《共形不变量》）对这一概念所作的许多出色的阐述。

3. 以 $l(C)$ 表示可求长曲线 C 的长度，并将此记号推广到局部可求长曲线，此时可以有 $l(C) = \infty$。我们的第一个结果同定理 10.8 恰好是两个相反方向上的结果。

引理 10.4 设 A 是 ∂D 的一段弧。若 $f \in S$ 在 A 上连续，则

$$l(f(A)) \geqslant \operatorname{diam}(f(A)) \geqslant K(A) > 0 \tag{13}$$

其中常数 $K(A)$ 仅依赖于 A。

证 假如结论不成立。则可找到函数 $f_n \in S$ 及收敛于 A 的弧 $C_n \subset D$，使得 $\operatorname{diam} f_n(C_n) \to 0$。又因由 (1.2.13) 式有

$$(1 - |z|^2) f_n^{\#}(z) \leqslant 4 \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant |z| < 1, n = 1, 2, \cdots\right),$$

故从定理 9.2 后面的附注（9.1 节）知序列 (f_n) 的某个子列在 D 内局部收敛于一个常数。但因 $f_n(z) = z + \cdots$，这是不可能的。

我们来证明盖林与海曼的两个结果（Gehring and Hayman 1962）。

引理 10.5 若 $f(z)$ 在 D 内解析单叶且在 $B = \{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \partial D$ 上连续，则对某绝对常数 K 有

$$\int_{-1}^{+1} |f'(x)| dx \leqslant K l(f(B)). \tag{14}$$

附带指出，最佳的常数 K 满足 $4.56 \leqslant K \leqslant 17.45$（Jaenisch 1968）。

证 设 $\varphi(\zeta) = \left(\zeta + \frac{1}{2}\right) \Big/ \left(1 + \frac{1}{2}\zeta\right)$，$A$ 为 ∂D 上 i 与 φ

(i) 间的弧。我们以递推方式定义函数 φ_n: φ_0 是恒等函数，

$$\varphi_{n+1}=\varphi\circ\varphi_n,\quad \varphi_{-(n+1)}=\varphi^{-1}\circ\varphi_{-n},\quad (n=0,1,\cdots),$$

并记 $x_n=\varphi_n(0)$，故 $x_{n+1}=\varphi_n\left(\frac{1}{2}\right)$（见图 10.4）。

寇勃变换

$$f_n(\zeta)=[f(\varphi_n(\zeta))-f(x_n)]/[(1-x_n^2)f'(x_n)]$$
$$(n=0,\pm1,\cdots)$$

属于 S。作代换 $x=\varphi_n(\xi)$ 知

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f'(x)|dx=(1-x_n^2)|f'(x_n)|\int_0^{\frac{1}{2}}|f_n'(\xi)|d\xi.$$

对 $f_n(\zeta)$ 应用引理 10.4 及寇勃偏差定理便得到

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}|f'(x)|dx\leqslant K_1 l[f(\varphi_n(A))]\quad (n=0,\pm1,\cdots).$$

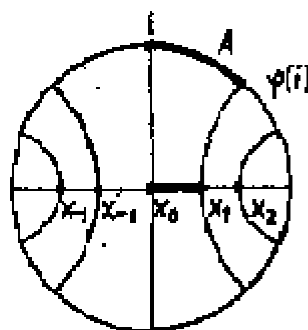


图 10.4

因为诸区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 覆盖 $(-1,+1)$ 而诸弧 $\varphi_n(A)$ 覆盖 B，并且除端点外它们彼此互不相交，因此把这些不等式加起来就得到 (14) 式。

定理 10.9 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶。若 $C\subset D$ 是从 0 到 $e^{i\theta}$ 的若当弧，则

$$(15)\qquad \int_0^1|f'(re^{i\theta})|dr\leqslant Kl(f(C))$$

其中 K 是绝对常数。

证 (a) 不妨设 $\theta=0$。首先考虑 C 与 R 除 0 和 1 两点外无其它交点的情形。于是，C 连同它关于 R 的反射便构成一条闭若当曲线 J。设单叶函数 $\psi(s)$ 把 D 映照成 J 的内区域，使 $\psi(0)$ 取实值且 $\psi'(0)>0$，则 $f(\psi(s))$ 在 D 内解析单叶，在 $\bar{D}\backslash\{1\}$ 连续。因为 $\{\psi(x):-1<x<1\}=(0,1)$ 且 $C=\{\psi(e^{i\theta}),\ 0<\theta\leqslant\pi\}$，故从引理 10.5 便可推出结论 (15)。

(b) 在一般情形，可将 C 表为如下的不相交并：

$$C=(C\cap\mathrm{R})\cup\bigcup_n C_n,$$

其中诸 C_n 是一些开若当弧，可以为有限个也可以是无限多个，它们不与 R 相交，端点 x_n 与 x_n' 在R上。故由 (a) 推出

$$\int_0^1 |f'(x)|dx \leqslant \int_{C\cap\mathbb{R}} |f'(x)|dx + \sum_n \int_{x_n}^{x_n'} |f'(x)|dx$$

$$\leqslant l(f(C\cap\mathbb{R})) + K\sum_n l(f(C_n))$$

$$\leqslant Kl(f(C)).$$

4. 半径 $R=[0,1)$ 的象 $f(R)$ 具有某些极小性质：由定理 10.9，$f(R)$ 具有同象域几何相一致的本质上的最短长度。从推论 10.3 知 $f(R)$ 的大概位置是在边界的"上"、"下"两部分的中间（参见问题 1）。下一个结果表明关于半径象 $f(R)$ 的方向也有某些类似性质(见图 10.5)。

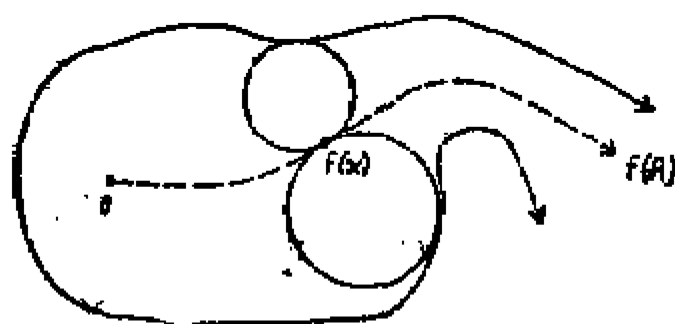


图 10.5

定理 10.10 设 $f(z)$ 在 D 内单叶。对 $x\in R=[0,1)$，命 $D^{\pm}(x)$ 为 $f(D)$ 内同 $f(R)$ 切于 $f(x)$ 的两个最大圆盘，则

$$f(R)\cap[D^+(x)\cup D^-(x)]=\varnothing.$$

这一定理是把下面的引理（Pommerenke 1962c）应用于函数

$$g(\zeta)=(1-x^2)f'(x)\Big/\left[f\left(\frac{\zeta x+1}{\zeta+x}\right)-f(x)\right]$$

$$=\zeta+\cdots(|\zeta|>1)$$

时所得的推论。

引理 10.6 设 $g\in\Sigma$，T 是包含 $\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$ 且平行于R的最小闭带域。则

$$g(\xi)\in T,\quad \xi\in\mathbf{R}.$$

证 (Kühnau 1969) 设 $T=\{\alpha\leqslant \mathrm{Im}w\leqslant\beta\}$. 函数 $s=\zeta+\zeta^{-1}$ 把 Δ 映照成 $H=\hat{\mathbb{C}}\backslash[-2,+2]$. 若 $\zeta(s)$ 是它的反函数,则 $h(s)=g(\zeta(s))=s+\cdots$ 在 H 内单叶. 因为 $h(s)-s$ 在 H 内(包含 ∞)解析,最大值原理表明对于 $s\in H$, 有

$$\mathrm{Im}[h(s)-s]\leqslant \limsup_{s\to\partial H}\mathrm{Im}[h(s)-s]$$

$$=\limsup_{s\to\partial H}\mathrm{Im}h(s)\leqslant\beta.$$

类似可证明对于 $s\in H$, 有 $\mathrm{Im}[h(s)-s]\geqslant\alpha$. 因为当 ξ 为实数时, $\xi+\xi^{-1}$ 为实数,故推知 $\alpha\leqslant\mathrm{Im}g(\xi)\leqslant\beta$.

问　　题

1. 设 $f(z)$ 在 D 内解析在 $\bar{D}$ 连续. 以 $d^+(w)$ 与 $d^-(w)$ 分别表示 $w\in f(D)$ 到 $\{f(e^{i\theta}):0<\theta<\pi\}$ 与 $\{f(e^{i\theta}):-\pi<\theta<0\}$ 的距离. 试证明对某个绝对常数 K 有

$$\frac{1}{K}\leqslant\frac{d^+(f(x))}{d^-(f(x))}\leqslant K\quad(-1<x<1).$$

2. 设 $f(z)$ 在 D 内解析在弧 $A\subset\partial D$ 上连续. 若 $\omega(z_0,A)\geqslant\alpha>0$, 试证明 $\mathrm{diam}f(A)\geqslant K(\alpha)d(f(z_0))$ 其中常数 $K(\alpha)>0$ 仅依赖于 α.

3. 设 $g\in\Sigma$, 我们称 $g(\Delta)$ 的素端 P (见 9.2 节)为有长可达的, 如果存在一条长度有限的开若当弧,这条若当弧与代表素端 P 的一条零链的几乎一切横截线相交. 若 $\zeta\in\partial\Delta$ 对应于一个有长可达的素端; 试证明径向线段的象 $\{g(r\zeta):1<r<2\}$ 具有有限长度.

4. 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶. 假定 C 是 $f(D)$ 的一条横截线, F_1 和 F_2 是 $f(D)\backslash C$ 的两个分集. 设 B 是 D 内非欧线段的象. 试证明: 若 B 的两端位于 F_1 中, 则对某绝对常数 K 有

$$\mathrm{dist}(C,z)\leqslant Kl(C),\ z\in B\cap F_2.$$

("II. Faltensatz" of Ostrowski 1936).

5. 设 G 与 H 为若当区域, $G\subset H$. 设 B 是满足 $B\subset\partial G\cap\partial H$ 的一段弧. 证明

$$\omega(z,B,G)\geqslant\omega(z,B,H)\quad(z\in G)$$

(区域扩张的卡列曼原理，见 Nevanlinna 69 页)。

10.4 线性测度与单叶函数

本节要用到关于有界解析函数及哈代 (Hardy) 的类 H^p 的一些结果，特别是关于 H^1 的一些结果(见丢伦的书第二章或戈鲁辛的书第九章)。

法都定理断言：D 内的有界解析函数在 ∂D 上几乎处处有角极限，即除去一个勒贝格零测集外角极限存在。**黎斯唯一性定理**断言：这些角极限几乎处处不为 0，除非该函数恒为 0。

设 $0<p<\infty$。若 $g(z)$ 在 D 内解析，则

$$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p d\theta \quad (0<r<1) \tag{1}$$

递增。若 $I_p(r)$ 有界从而收敛于一个有限极限，则说 $g\in H^p$。对所有的 p，每个有界解析函数均属于 H^p。

现在假定 $g\in H^p(0<p<\infty)$。那末

$$g(e^{i\theta})=\lim_{z\to e^{i\theta}} g(z) \tag{2}$$

作为角极限几乎处处存在并满足

$$g(e^{i\theta})\neq 0 \text{ 对几乎一切 } \theta. \tag{3}$$

为了避免循环论证，我们不能从以后才证明的更一般的普里瓦洛夫 (Privalov) 唯一性定理出发去推证这个结果。我们作这样的处理：凡是极限 (2) 不存在时即置 $g(e^{i\theta})=0$，这样，$g(e^{i\theta})^p$ 即为勒贝格可积并且

$$\int_0^{2\pi}|g(e^{i\theta})-g(re^{i\theta})|^p d\theta\to 0 \quad (r\to 1-0). \tag{4}$$

现在证明在形式上已经拓广的普里瓦洛夫 (1919, 1924)和斯米尔诺夫 (1932) 的某些结果。

引理 10.7 设**单叶函数 $f(z)$ 把 D 映照成可求长若当曲线 J 的内区域**，则 $f'\in H^1$，并且

$$l(J)=\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|d\theta \tag{5}$$

证 因 J 是若当曲线，函数 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一一连续（见定理 9.10），由次调和函数最大值原理（Ahlfors 237 页）推出

(6) $$\max_{|z|=r}\sum_{\nu=1}^{n}|f(ze^{i\theta_\nu})-f(ze^{i\theta_{\nu-1}})|$$

$$(0\leqslant\theta<\theta_1<\cdots<\theta_n\leqslant 2\pi),$$

在 $r=1$ 时为最大，并且由可求长曲线长度的定义其值不大于 $l(J)$. 因而对于 $0\leqslant r<1$,

(7) $$\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|d\theta$$

$$=\sup_{\{\theta_\nu\}}\sum_{\nu=1}^{n}|f(re^{i\theta_\nu})-f(re^{i\theta_{\nu-1}})|\leqslant l(J).$$

因此 $f'\in H^1$. 从 (4) 和 (7) 式便推出

$$\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})|d\theta=\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|d\theta$$

$$\geqslant\lim_{r\to1}\sum_{\nu=1}^{n}|f(re^{i\theta_\nu})-f(re^{i\theta_{\nu-1}})|$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}|f(e^{i\theta_\nu})-f(e^{i\theta_{\nu-1}})|,$$

选取适当的 θ_ν 可使其任意接近于 $l(J)$.

设 $E\subset\mathbf{C}$. 我们用可数多个直径为 d_k 的圆盘 D_k 覆盖 E. 集 E 的(外)**线性测度**定义为

(8) $$\Lambda(E)=\lim_{\varepsilon\to0}\inf_{d_k<\varepsilon}\sum_k d_k\leqslant+\infty;$$

如此定义的集函数显然具有 σ 次可加性. 线性测度是特殊的豪斯道夫 (Hausdorff) 测度；在 Besicovitch 1928, 1938 中讨论了它的几何性质.

若 C 是可求长曲线，我们把 C 分成一些充分小的弧段 C_ν. 以诸 C_ν 的端点连线中点为心，以 $l(C_\nu)$ 为直径的所有闭圆盘覆盖 C. 故推知

(9) $$\Lambda(C)\leqslant l(C).$$

定理 10.11 若 $f(z)$ 在 D 内解析单叶，则

$$f' \in H^1 \Leftrightarrow \Lambda(\partial f(D)) < \infty.$$

若 $f' \in H^1$，则

(i) $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续；

(ii) $f(e^{i\theta})$ 绝对连续；

(iii) 对几乎一切 θ，角微商 $f'(e^{i\theta})$ 满足

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}f'(e^{i\theta}) \neq 0.$$

证 (a) 记 $G = f(D)$. 首先假定 $\Lambda(\partial G) < \infty$，并设 $\lambda > \Lambda(\partial G)$. 对于 $n = 1, 2, \cdots$，我们可以用可数多个直径 $d_k < \frac{1}{n}$ 的圆盘覆盖 ∂G，并且使得 $\sum d_k < \lambda$. 因 ∂G 是紧集，故被其中有限个圆盘所覆盖，必要时可从中去掉一些圆盘并对其余的圆盘稍加修改，故不妨假定每个圆盘都包含 ∂G 的一个点并且互不相切。因 ∂G 连通，这些圆盘的并 U_n 亦连通. 因而 $\mathbb{C}\backslash\overline{U}_n$ 的包含 $f(0)$ 的分集 G_n 为单连通，并且因 $\partial G \subset U_n$ 而知 G_n 位于 G 中. 由于 U_n 无割点，故由定理 9.9 (9.3 节)知 ∂G_n 是若当曲线.

设 $f_n(z)$ 把 D 映照成 G_n，$f_n(0) = f(0)$，$\arg f'_n(0) = \arg f'(0)$[1]. 因 $G_n \subset G$，且 $\partial G_n \subset U_n$ 位于 ∂G 的 $\frac{1}{n}$ 邻域内，故由卡氏核定理(1.4 节)推知，当 $n \to \infty$ 时，$f_n(z)$ 在 D 内局部一致地收敛于 $f(z)$.

由于这些圆盘的周长之和小于 $\pi\lambda$. 故由积分 (1) 的单调性及引理 10.7 推出

$$\int_0^{2\pi} |f'_n(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |f'_n(e^{i\theta})|\, d\theta < \pi\lambda$$

$$(0 < r < 1).$$

令 $n \to \infty$ 而得到

1) 此处原文误为：$\arg f'_n(0) = \arg f(0)$. ——译者注

$$\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|d\theta \leqslant \pi L \quad (0<r<1).$$

故 $f'\in H^1$.

(b) 现在假定 $f'\in H^1$. 选取 θ_0 使得有限径向极限 $f'(e^{i\theta_0})$与 $f(e^{i\theta_0})$ 存在. 因对于 $0<r<1$,

(10) $$f(re^{i\theta})=f(re^{i\theta_0})+ir\int_{\theta_0}^{\theta}e^{it}f'(re^{it})dt,$$

故由(4)式,其径向极限 $f(e^{i\theta})$ 关于 θ 一致地存在,并且(10)式对于 $r=1$ 亦成立,因而 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 连续. (ii) 和(iii)则可由熟知的不定积分性质推出,且由(3)式,知几乎处处有 $f'(e^{i\theta})\neq 0$. 最后从(9)式我们断定

(11) $$\Lambda(\partial G)\leqslant l(\partial G)=\int_0^{2\pi}|f'(e^{it})|dt<\infty.$$

定理 10.12 设 $f'\in H^1$, A 是 ∂D 的可测子集. 则

$$\operatorname{mes}A=0\Longleftrightarrow \Lambda(f(A))=0.$$

证 (a) 设 $\operatorname{mes}A=0$, 由积分的绝对连续性, 可以找到可数个区间 (α_k,β_k) 覆盖 $B=\{t: e^{it}\in A\}$ 使得对于 $\varepsilon>0$ 有

$$\sum_k p_k<\frac{\varepsilon}{4}, \quad p_k=\int_{\alpha_k}^{\beta_k}|f'(e^{it})|dt.$$

因诸圆盘 $\{w: |w-f(e^{i\alpha_k})|<2p_k\}$ 覆盖 $f(A)$, 且直径之和 $<\varepsilon$. 故有 $\Lambda(f(A))=0$.

(b) 反之, 设 $\operatorname{mes}A>0$. 为证明 $\Lambda(f(A))>0$, 不妨设 A 是闭集因而 B 也是闭集(必要时可取一适当子集). 由定理 10.11 的性质(iii), 亦可假定绝对连续函数 $u(\theta)=\operatorname{Re}f(e^{i\theta})$ 满足

$$u'(\theta)=-\operatorname{Im}[e^{i\theta}f'(e^{i\theta})]\neq 0\ (\text{对 }\theta\in E,\ \operatorname{mes}E>0);$$

否则考虑 $if(z)$ 以代替 $f(z)$. 以 $\chi(t)$ 表示 B 的特征函数. 因 $|u'(t)|$ 与 $|u'(t)|\chi(t)$ 可积,知 $\tau\to+0$ 时对几乎一切 $\theta\in B\cap E$ 有

$$\frac{1}{\tau}\int_\theta^{\theta+\tau}|u'(t)|dt\to|u'(\theta)|\neq 0,$$

(12) $$\frac{1}{\tau}\int_{\theta}^{\theta+\tau}|u'(t)|\chi(t)dt\to|u'(\theta)|.$$

选取一个 θ 值使(12)式成立。记 $I_\tau=(\theta,\theta+\tau)\ (\tau>0)$。由(12)式我们得到

(13) $$\frac{1}{\tau}\int_{I_\tau\setminus B}|u'(t)|dt=\frac{1}{\tau}\int_{\theta}^{\theta+\tau}|u'(t)|(1-\chi(t))dt\to0\quad(\tau\to+0).$$

因直线上开集 $I_\tau\setminus B$ 是可数个不相交区间的并，故由(13)式推知当 $\tau\to0$ 时 $\text{mes}\,u(I_\tau\setminus B)=o(\tau)$，并且

$$u(\theta+\tau)-u(\theta)=\tau u'(\theta)+o(\tau)\quad(\tau\to+0).$$

因 $u(t)$ 连续，故 $u(I_\tau)$ 是长度不小于 $\tau|u'(\theta)|-o(\tau)$ 的一个区间，且由 θ 的选取方式，知其中 $u'(\theta)\neq0$。因此若 τ 充分小，则

(14) $$\begin{aligned}\text{mes}\,u(I_\tau\cap B)&\geqslant\text{mes}\,u(I_\tau)-\text{mes}\,u(I_\tau\setminus B)\\&\geqslant\tau|u'(\theta)|-o(\tau)\geqslant0.\end{aligned}$$

把 $f(A)$ 投影到实轴上，即由线性测度定义得到

$$\Lambda(f(A))\geqslant\text{mes}\ \text{Re}f(A)=\text{mes}\ u(B)>0.$$

问　题

1. 试应用定理5.1证明 $S\subset H^p$，$0<p<\frac{1}{2}$。

2. 试由法都定理推证出星形函数对几乎一切 θ 具有角微商。

3. 设 $g\in\Sigma$，$G=g(\Delta)$。证明下列三命题等价：

   (i) $\Lambda(\partial G)<\infty$；

   (ii) ∂G 是一条可求长曲线的支撑集；

   (iii) $g'(z^{-1})(z\in D)$ 属于 H^1。

4. 设函数 $g\in\Sigma$ 把 Δ 映照为可求长若当弧 C 的余集。试证明

$$\int_0^{2\pi}|g'(e^{it})|dt=2\Lambda(C).$$

5. 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶。假定 A 是 ∂D 的闭子弧使得 $\Lambda(f(A))<\infty$。试证明对几乎一切 $\zeta\in A$，角微商 $f'(\zeta)$ 存在并且

$$\int_A |f'(\zeta)-f'(r\zeta)||d\zeta|\to 0 \quad (r\to 1-0).$$

10.5 普莱斯奈尔定理与角微商

1. 我们称点 $\zeta\in\partial D$ 为 D 内亚纯函数 $g(z)$ 的**普莱斯奈尔点**，如果对于 ζ 点的每个施笃兹角 A 及每个 $r<1$，集 $\{g(z): z\in A, r<|z|<1\}$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 内稠密. 用聚值集的语言，这意味着对 ζ 的每个施笃兹角 A 有

$$C_A(g,\zeta)=\hat{\mathbb{C}}.$$

因此，粗略地说，普莱斯奈尔点与法都点相对立的；所谓**法都点**即在该处存在角极限 a 因而 $C_A(g,\zeta)=\{a\}$ 的点.

我们现在证明强有力的普莱斯奈尔定理 (Plessner 1927):

定理 10.13 D **内每个亚纯函数在几乎一切非普莱斯奈尔点具有有限的角极限.**

因此，在几乎一切点，亚纯函数在其角域内的变化状态要么十分规则要么十分紊乱. 定理的证明基于构造 D 的一个适当的子域，使 $g(z)$ 在其中有界并且该子域的边界具有有限线性测度(其构造方法是由鲁辛 (Lusin) 与普里瓦洛夫提出的).

证 考虑所有的圆盘

(1) $\{w\in\mathbb{C}: |w-c|<\delta\}$ ($\mathrm{Re}\,C$, $\mathrm{Im}\,C$, δ 是有理数)

及满足 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{6}$ 和 $\dfrac{1}{2}<r<1$ 的一切有理数 α 和 r. 设

$$(D_n, \alpha_n, r_n) \quad (n=1,2,\cdots)$$

是这可数个圆盘及可数个数的一个穷举. 以 E_n 表示 ∂D 上不具有有限角极限并满足

(2) $\{g(z): |\arg(1-\bar{\zeta}z)|<\alpha_n, r_n<|z|<1\}\cap D_n=\emptyset$

的所有 ζ 点的集. 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是 $g(z)$ 的不存在有限角极限的那些非普莱斯奈尔点的集合. 因此只需证明 $\mathrm{mes}\,E_n=0$ 就足够了.

删去足标 n，区域

(3) $$H=\{|z|<r\}\cup\bigcup_{\zeta\in E}\{|\arg(1-\bar{\zeta}z)|<\alpha,\quad r\leqslant|z|<1\}$$

为星形若当区域(见图 10.6)．设 $m=3,4,\cdots$,[1] 若 $\zeta_\mu(\mu=1,2,\cdots,m)$ 是 $[0,e^{2\pi i\mu/m}]$ 与 ∂H 的交点，简单的几何上的考虑表明，诸圆盘 $\left\{|z-\zeta_\mu|<\frac{\sin\frac{2\pi}{m}}{\sin\alpha}\right\}$ 覆盖 ∂H．从而推出

(4) $$\Lambda(\partial H)\leqslant 2\pi/\sin\alpha<\infty.$$

设单叶函数 $\varphi(s)$ 把 $|s|<1$ 映照成 H 使得 $\varphi(0)=0$．假如 $z_1,\cdots,z_k$ 是 $g(z)-c$ 在闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 上的零点(如果有的话)，则函数

(5) $$h(z)=\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_k)}{g(z)-c}\neq 0$$

在 $|z|\leqslant r$ 内有界．从(1)，(2)和(3)式推出在 $H\setminus\{|z|<r\}$ 内 $|h(z)|<2^k/\delta$，故 $h(z)$ 在 H 内有界．因此函数 $h(\varphi(s))$ 在 $|s|<1$ 内解析有界，因而由法都定理及黎斯唯一性定理它几乎处处有非零角极限．

因 $\Lambda(\partial H)<\infty$，从定理 10.11 推知 $\varphi'\in H^1$ 并且 $\varphi(s)$ 在 $|s|=1$ 上几乎处处有非零角微商，从而几乎处处共形；因此在几乎一切 $\zeta\in\varphi^{-1}(E)$ 处 $\varphi(s)$ 共形．若 $\varphi(s)$ 在 s 共形且 $h(\varphi(s))$ 在 ζ 有角极限，则 $h(z)$ 在 $\varphi(\zeta)$ 有角极限．由 E 的定义及(5)式，$h(z)$ 在 E 上没有非零角极限．于是我们断言 $h(\varphi(s))$ 在 $\varphi^{-1}(E)$ 上几乎处处没有非零角极限，但因 $h(\varphi(s))$ 几乎处处有非零角极限，从而推出 $\text{mes}\,\varphi^{-1}(E)=0$．故由定理 10.12 有 $\Lambda(E)=0$，因此 $\text{mes}E=0$．这就证明了普莱斯奈尔定理．

作为一个简单的推论，我们导出普里瓦洛夫唯一性定理：

定理 10.14 设 $g(z)\neq 0$ 在 D 内亚纯．则 $g(z)$ 在 ∂D 上几

---

1) 原文此处为：$m=1,2,\cdots$．——译者注

乎处处不以 0 为角极限.

证 函数 $f(z)=1/g(z)$ 在 D 内亚纯. 若 $g(z)$ 在 ζ 有角极限 0, 则 $f(z)$ 有角极限 ∞, 特别, 该 ζ 点不是 $f(z)$ 的普莱斯奈尔点. 故由普莱斯奈尔定理, 这些 ζ 点的集测度为零.

2. 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶. 我们称 $\zeta\in\partial D$ 为挠曲点, 如果存在有限角极限 $f(\zeta)$, 并且沿着每条以 ζ 为端点的弧 Γ, 函数

$$\arg[f(z)-f(\zeta)]$$

既无上界又无下界. 这是一个纯几何的定义 (对照 9.2 节推论 9.3).

引理 10.8 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶, Δ 是点 $\zeta\in\partial D$ 的施笃兹角. 则 ζ 为挠曲点当且仅当角极限 $f(\zeta)$ 存在并且 $\arg[f(z)-f(\zeta)]$ 在 Δ 中无上下界.

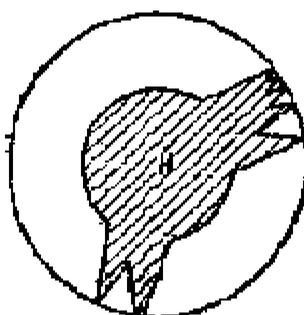


图 10.6

证 在定理 10.5(10.2 节)的证明中已知

$$(6)\qquad h(z)=\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}$$

是布洛赫函数. 若设 $\arg[f(z)-f(\zeta)]$ 在某个以 ζ 为端点的弧 Γ 上有上界, 则 $\operatorname{Im}h(z)$ 在 Γ 上有上界, 故由定理 9.5 (9.1 节) 在 Δ 中亦然. 从而知 $\arg[f(z)-f(\zeta)]$ 在 Δ 中有上界. 其逆是明显的, 因为我们可以选取 $\Gamma=[0,\zeta]$.

现在应用普莱斯奈尔定理建立麦克米伦的一个结果 (J. E. McMillan 1969), 该结果表明, 在 ∂D 上几乎一切点, 函数的边界性质或者很好或者很坏.

定理 10.15 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶, 则 $f(z)$ 在几乎所有非挠曲点有非零角微商.

证 应用定理 10.13 于解析函数

$$g(z)=\log f'(z)\quad(z\in D).$$

若 $g(z)$ 在 ζ 具有有限角极限, 则 $f(z)$ 在 ζ 具有(有限的)非零角微商. 因此, 只须证明 $g(z)$ 的几乎所有普莱斯奈尔点是 $f(z)$ 的

挠曲点就足够了. 法都定理与黎斯唯一性定理应用于有界函数 $z/f(z)$[1] 表明，对几乎一切 $\zeta\in\partial D$，角极限 $f(\zeta)$ 存在并且有限. 因此定理的结论乃是引理 10.8 及下一个引理的推论.

引理 10.9 设 $f(z)$ 在 D 内解析单叶. 命

$$A(\zeta)=\left\{z\in D: |\arg(1-\bar\zeta z)|<\frac{\pi}{4},\ |z-\zeta|<\frac{1}{2}\right\}.$$

并设 E 是满足下列条件的 $\zeta\in\partial D$ 的集合:

(i) 存在有限角极限 $f(\zeta)$;

(ii) $\arg[f(z)-f(\zeta)]$ 在 $A(\zeta)$ 内有上界或有下界;

(iii) $\arg f'(z)$ 在 $A(\zeta)$ 内无上下界.

则 $\operatorname{mes}E=0$.

证 E 是可测集. 设 $\operatorname{mes}E>0$，因由条件 (ii)，

$$\sup_{z\in A(\zeta)}(\pm\arg[f(z)-f(\zeta)])\quad(\zeta\in E)$$

有限，故存在有限常数 M 及 E 的子集 E'，$\operatorname{mes}E'>0$，使得

$$\arg[f(z)-f(\zeta)]<M\quad(z\in A(\zeta),\ \zeta\in E'),\tag{7}$$

集 E' 在某个点 ζ 具有密度 1. 不妨设 $\zeta=1$ (Natanson 264 页). 布洛赫函数 $\log f'(z)$ (定理 9.4) 在 $A(1)$ 内无界从而在 $(0,1)$ 内无界(定理 9.5). 因此存在 $r_n\to1-0$ 使得

$$\arg f'(r_n)\to+\infty\quad(n\to\infty)\tag{8}$$

考虑

$$\varphi_n(s)=\frac{s+r_n}{1+r_ns},\tag{9}$$

$$f_n(s)=\frac{f(\varphi_n(s))-f(r_n)}{(1-r_n^2)f'(r_n)}\ (|s|<1).$$

令 $P=\{\operatorname{Re}s\geqslant0\}\cap\partial D$. 因

$$\frac{1}{4}(1-r_n^2)\leqslant|\varphi_n'(s)|\leqslant1-r_n^2\quad(s\in P),$$

从而推出

$$\operatorname{mes}\varphi_n(P)\leqslant\pi(1-r_n^2)\to0\quad(n\to\infty).$$

---

1) 此处假定 $f(0)=0$，否则应对分子作适当改变. ——译者注

又因为 E' 在点 1 具有密度 1 而有

$$\frac{\operatorname{mes}[P\setminus\varphi_n^{-1}(E')]}{\pi} \leqslant 4\frac{\operatorname{mes}[\varphi_n(P)\setminus E']}{\operatorname{mes}\varphi_n(P)} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此，对于充分大的 n 有 $\operatorname{mes}[P\cap\varphi_n^{-1}(E')] > \frac{\pi}{2}$. 由于 $f_n\in S$，定理 10.8 (10.3 节)表明存在 $s_n\in P\cap\varphi_n^{-1}(E')$，使得对于某个绝对常数 K_1 有

$$(10) \qquad \int_0^1 |f_n'(rs_n)|\,dr \leqslant K_1.$$

从而由寇勃偏差定理有 $|f_n(s)| \geqslant |s|/(1+|s|)^2 \geqslant \frac{1}{8}$，$\left(|s|\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 而推出

$$(11) \qquad |\arg f_n(s_n)| \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{d}{dr}\arg f_n(rs_n)\right|dr + \left|\arg f_n\left(\frac{1}{2}s_n\right)\right|$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|\frac{f_n'(rs_n)}{f_n(rs_n)}\right|dr + K_2 \leqslant 8K_1 + K_2 < K_3.$$

回到 z 平面，由 (9) 和 (11) 式，点 $\zeta_n=\varphi_n(s_n)\in E'$ 且满足

$$(12) \qquad |\arg[f(\zeta_n)-f(r_n)] - \arg f'(r_n)| = |\arg f_n(s_n)| < K_3.$$

因为 $\operatorname{Re}s_n\geqslant 0$，故对足够大的 n 有 $r_n\in A(s_n)$，因此，(7) 和 (12) 式蕴含

$$\arg f'(r_n) < M + K_3 + \pi,$$

这同 (8) 式相矛盾.

若 $f(z)$ 在点 $\zeta\in\partial D$ 共形，则 ζ 当然不是挠曲点. 因而由定理 10.15 直接推出:

推论 10.4 单叶函数在几乎一切共形的点具有非零角微商.

3. 最后，我们证明与定理 10.12 有关的一个结果(对照 McMillan 1969).

定理 10.16 设 $f(z)$ 在 D 内解析. 若 $f(z)$ 在可测集 $A\subset\partial D$ 的每一点有角微商，则

$$(13) \qquad \operatorname{mes}A=0 \iff \Lambda(f(A))=0.$$

证 作与普莱斯奈尔定理证明中类似的一个构造. 令

$$T(\zeta)=\left\{z:\frac{1}{2}\leqslant|z|<1,\right.$$

$$\left.|\arg(1-\bar{\zeta}z)|<\frac{\pi}{4}\right\}\quad(\zeta\in A).$$

因 $f(z)$ 在每个点 $\zeta\in A$ 有(有限)角微商,故 $|f'(z)|$ 在 $T(\zeta)$ 内有界.

假如 $\mathrm{mes}A>0$, 则可找到子集 $B\subset A$, $\mathrm{mes}B>0$ 以及常数 M, 使得

(14) $$|f'(z)|<M\qquad z\in T(\zeta),\quad \zeta\in B.$$

类似区域(3),我们知若当区域

(15) $$H=\left\{|z|<\frac{1}{2}\right\}\cup\bigcup_{\zeta\in B}T(\zeta)$$

满足 $\Lambda(\partial H)<\infty$. 若假定 $\Lambda(f(A))>0$ 以代替 $\mathrm{mes}A>0$,则可找到 $B\subset A$ 满足 $\Lambda(f(B))>0$ 而且具有同样性质; 此处我们用到了 $\Lambda(\cdot)$ 是外测度的这一事实.

在两种情况下, 把 D 映照成 H 的单叶函数 $\varphi(s)$ 可扩张为 $\bar{D}$ 到 $\bar{H}$ 的同胚(定理 9.10), 且因 $\Lambda(\partial H)<\infty$ 而有 $\varphi'\in H^1$ (定理 10.11). 若 $B^*=\varphi^{-1}(B)$, 则由定理 10.12 知

(16) $$\mathrm{mes}B^*=0\quad\Longleftrightarrow\Lambda(B)=\mathrm{mes}B=0.$$

由 (14) 和 (15) 式,函数 $g(s)=f(\varphi(s))$ 满足

$$|g'(s)|=|f'(\varphi(s))||\varphi'(s)|\leqslant M'|\varphi'(s)|\quad(|s|<1).$$

因此 $g'\in H^1$, 再由定理 10.12 我们推知

(17) $$\Lambda(g(B^*))=0\quad\Longleftrightarrow\mathrm{mes}B^*=0.$$

设 $\zeta\in B$, $R=[0,\zeta]$. 则 $\varphi^{-1}(R)$ 是以 $\zeta^*=\varphi^{-1}(\zeta)\in B^*$ 为端点的一段弧, 并且在 $\varphi^{-1}(R)$ 上当 $s\to s^*$ 时 $g(s)=f(\varphi(s))\to f(\zeta)$. 因 $g(s)$ 在 $\bar{D}$ 连续, 从而 $g(\zeta^*)=f(\zeta)$, 故 $g(B^*)=f(B)$.

因此, (16) 和 (17) 式表明

$$\mathrm{mes}B=0\quad\Longleftrightarrow\Lambda(f(B))=0$$

———　———　———

并且因为由我们的构造分别有 $\mathrm{mes}A > 0 \iff \mathrm{mes}B > 0$ 以及

$$\Lambda(f(A)) > 0 \iff \Lambda(f(B)) > 0,$$

从而推出 (13) 式。

问　　题

1. 试证明：有界单叶函数可以在单位圆周的几乎一切点（但非一切点）有捩曲点（应用例 10.1）。

2. 设单叶函数 $f(z)$ 把 D 映照为若当曲线 C 的内区域。试证明对于使 C 在 $f(\zeta)$ 有切线的所有 $\zeta \in \partial D$ 几乎都存在非零的角微商。

3. 设 $\varphi(z)$ 在 D 内单叶，$|\varphi(z)|<1$。设 $A \subset \partial D$ 是可测集，$\mathrm{mes}A>0$，使得对 $\zeta \in A$ 角极限 $\varphi(\zeta)$ 存在且满足 $|\varphi(\zeta)| = 1$。试证明：

(a) 在 A 的几乎一切点角微商存在；

(b) $\mathrm{mes}\varphi(A)>0$；

(c) 对几乎一切 $\zeta \in A$，曲线 $\partial\varphi(D)$ 在点 $\varphi(\zeta)$ 有切线。

4. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内单叶在 $\bar{D}$ 连续，$f(D) \subset g(D)$。假定 A 和 B 是 ∂D 的子集使得 $f(A) = g(B)$。试应用题 3 证明：若 $g(z)$ 在 B 中几乎一切的点共形，则 $f(z)$ 在 A 中几乎一切的点共形。

第十一章 容　量

在 10.4 节中我们已经看到，线性测度很适合于由可求长曲线界成的区域。对任意的单连通区域，我们现在就要引入的容量概念比测度更为适用。特别，我们要证明 10.3 节中某些结果的更精确的描述。

11.1 容量的性质

1. 设 $E\subset\mathbb{C}$ 是紧集，G 是 E 的外区域，即 $\hat{\mathbb{C}}\backslash E$ 的包含 ∞ 的分集。称

$$(1)\qquad \Delta_n=\Delta_n(E)=\max_{z_1,\cdots,z_n\in E}\prod_{\mu=1}^{n}\prod_{\substack{\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n}|z_\mu-z_\nu|$$

$$(n=2,3,\cdots)$$

为紧集 E 的 n 级判别式；使 (1) 式中的最大值达到的一组点 $z_\nu=z_{n\nu}(\nu=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 级斐开特点组（见 Fekete 1923b）。利用范德蒙行列式，可将 Δ_n 表示为

$$(2)\qquad \Delta_n=\Big|\det_{\nu=1,\cdots,n}(1\,z_{n\nu}\cdots z_{n\nu}^{n-1})\Big|^2,$$

并称

$$(3)\qquad q_n(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z-z_{n\nu})$$

为 n 次斐开特多项式。

引理 11.1 若 $E\subset\mathbb{C}$ 是紧集，且

$$(4)\qquad M_n=\max_{z\in E}|q_n(z)|,\quad M_n'=\max_{\nu=1,\cdots,n}|q_n'(z_{n\nu})|.$$

则对于 $n=2,3,\cdots$，有

(5)
$$M_n \leqslant \left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M'_{n+1} \leqslant \Delta_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}.$$

证 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是一组 n 级斐开特点。若 $z \in E$，则由 Δ_{n+1} 的极大性质有

(6)
$$|q_n(z)|^2\Delta_n = \prod_{\nu}|z-z_\nu|^2\prod\prod_{\mu\neq\nu}|z_\mu - z_\nu|$$
$$\leqslant \Delta_{n+1},$$

此式蕴含 $M_n^2\Delta_n \leqslant \Delta_{n+1}$。又因对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 有

(7)
$$\Delta_n = \prod_{\substack{\mu\neq\nu \\ \mu,\nu\neq k}}\prod |z_\mu - z_\nu| \cdot \prod_{\nu\neq k}|z_k - z_\nu|^2$$
$$\leqslant \Delta_{n-1}\prod_{\nu\neq k}|z_k - z_\nu|^2,$$

这就推出 $\Delta_n \leqslant \Delta_{n-1}M_n'^2$，这是因为由(3)式和(4)式有

(8)
$$M'_n = \min_k \prod_{\nu\neq k}|z_k - z_\nu|.$$

最后，由(8)式用乘法而得到 $M_n'^n \leqslant \Delta_n$。

从(5)式立即推出 $\Delta_{n+1}^{n-1} \leqslant \Delta_n^{n+1}$，故 $\Delta_n^{\frac{1}{n(n-1)}}$ 递减。我们称

(9)
$$\operatorname{cap}E = \lim_{n\to\infty}\Delta_n(E)^{\frac{1}{n(n-1)}}$$

为紧集 E 的(对数)容量；通常也称之为超限直径。根据最大值原理，斐开特点位于 ∂G 上，故 $\operatorname{cap}E = \operatorname{cap}\partial G$。

由(1)式和(9)式容易导出容量的下列性质：

(i) 单调性：若 $E \subset F$，则 $\operatorname{cap}E \leqslant \operatorname{cap}F$。

(ii) 齐性：若 $z^* = az + b$ 把 E 映照成 E^*，则 $\operatorname{cap}E^* = |a|\operatorname{cap}E$。

(iii) 短缩性：若对于 $z, z' \in E$，$|\varphi(z) - \varphi(z')| \leqslant |z - z'|$，则 $\operatorname{cap}\varphi(E) \leqslant \operatorname{cap}E$。

容量与多项式之间有着密切的联系。

引理 11.2 若 E 是紧集，则对 $n = 1, 2, \cdots$ 有

(10) $$\operatorname{cap}E \leqslant \left(\inf_{p_n} \max_{z\in E} |p_n(z)|\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant M_n^{\frac{1}{n}} \to \operatorname{cap}E \quad (n\to\infty)$$

其中下确界取之于所有形如 $p_n(z)=z^n+\cdots$ 的多项式。

证　设 m 是 n 的倍数。考虑多项式

(11) $$\tilde{p}_\mu(z)=p_n(z)^k z^l = z^\mu+\cdots \quad (\mu=kn+l,\ 0\leqslant l<n).$$

将 (2) 式中的行列式的前 $\mu-1$ 列乘以适当的倍数加到第 μ 列，得到

$$\Delta_m=\left|\det_{\nu=1,\cdots,m}(1\,\tilde{p}_1(z_{m\nu})\cdots\tilde{p}_{m-1}(z_{m\nu}))\right|^2.$$

选取 $\rho\geqslant 1$ 使得 $E\subset\{|z|\leqslant\rho\}$，则对于 $z\in E$ 和 $kn\leqslant\mu<(k+1)n$ 有 $|\tilde{p}_\mu(z)|\leqslant\rho^n|p_n(z)|^k$。故由阿达玛的行列式不等式推出

$$\Delta_m\leqslant\prod_{\mu=0}^{m-1}\left(m\max_{z\in E}|\tilde{p}_\mu(z)|^2\right)$$

$$\leqslant m^m\rho^{2mn}\max_{z\in E}|p_n(z)|^{m\left(\frac{m}{n}-1\right)}.$$

上式取 $m(m-1)$ 次方根再令 $m\to\infty$ 就推出(10)式的第一个不等式。第二个不等式是平凡的，因为有 $q_n(z)=z^n+\cdots$。至于极限关系，则可从(5)式和(9)式推得。

2. 现在我们利用斐开特点组的方法来构造格林函数 (Myrberg 1933, Leja 1934)。

定理 11.1　设 $E\subset\mathbb{C}$ 是紧集，G 是 E 的外区域。若 $\operatorname{cap}E>0$，则

(12) $$\gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{|q_n(z)|}{M_n}$$

在 $G'=G\backslash\{\infty\}$ 内局部一致地存在，它表示一个正调和函数，并且满足

(13) $$\gamma(z)=\log|z|-\log\operatorname{cap}E+O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

$$(|z|\to\infty).$$

若存在函数 $u(z)>0$ 在 G' 内除对数极点外调和且满足

$$u(z)=\log|z|+O(1)\quad(|z|\to\infty),$$

则

(14) $$u(z)\geqslant\gamma(z)>0\quad(z\in G').$$

另一方面，若 $\operatorname{cap}E=0$，则这样的函数 $u(z)$ 不存在.

我们称 $\gamma(z)$ 为G(关于∞)的格林函数. 格林函数也可定义为在∞具有展开式 $\log|z|+O(1)$ 的最小正调和函数. 格林函数存在当且仅当 $\operatorname{cap}E>0$；从(14)式我们看出，格林函数若存在便是唯一确定的.

证 (a) 设 $\operatorname{cap}E>0$. 函数

(15) $$\gamma_n(z)=\frac{1}{n}\log\frac{|q_n(z)|}{M_n}$$

在 G' 内调和，且由(3)式它满足

(16) $$\gamma_n(z)=\log|z|-\frac{1}{n}\log M_n+O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

$$(|z|\to\infty).$$

若 $E\subset\{|z|\leqslant\rho\}$，则由(3)式和(10)式推出

(17) $$\gamma_n(z)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\log(|z|+|z_{n\nu}|)$$

$$-\frac{1}{n}\log M_n\leqslant\log(|z|+\rho)-\log\operatorname{cap}E.$$

故由蒙代尔定理，可以选取子列 $(\gamma_{n_k}(z))$ 在 G' 内局部一致地收敛于一个调和函数 $\gamma(z)$. 由(17)式，$\gamma_{n_k}(z)-\log|z|$ 在∞邻近一致有界，于是可从(16)式及引理 11.2 推出(13)式.

拉格朗日插值公式表明

$$1=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q_n(z)}{q_n'(z_{n\nu})(z-z_{n\nu})}.$$

若 M_n' 如 (4) 式所定义，且记 $d(z)=\operatorname{dist}(z, E)$。我们推出

$$1 \leqslant \frac{|q_n(z)|}{M_n'} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|z-z_{n\nu}|} \leqslant \frac{n|q_n(z)|}{d(z)M_n'} \quad (z \in G')。$$

因由引理 11.1 和 11.2 有 $M_n' \geqslant M_{n-1} \geqslant (\operatorname{cap}E)^{n-1}$ 及 $M_n \leqslant \Delta_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}$，故从 (15) 式推出

$$\begin{aligned}\gamma_n(z) &\geqslant \frac{1}{n}\log\frac{d(z)M_n'}{nM_n} \\ &\geqslant \frac{1}{n}\log\frac{d(z)}{n}+\frac{n-1}{n}\log\operatorname{cap}E \\ &\quad -\frac{1}{n(n+1)}\log\Delta_{n+1}\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，即由 (9) 式得到 $\gamma(z)\geqslant 0$，于是由最大值原理有 $\gamma(z)>0$。

(b) 现假设函数 $u(z)$ 具有定理中所述的性质，则由 (4) 式有

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to\partial G}(\gamma_n(z)-u(z)) &\leqslant \limsup_{z\to\partial G}\gamma_n(z) \\ &= \max_{z\in E}\frac{1}{n}\log\frac{|q_n(z)|}{M_n}=0\end{aligned}$$

又因 $\gamma_n(z)-u(z)$ 在∞调和，故由最大值原理推出

$$\gamma_n(z)-u(z)\leqslant 0,$$

从而有

$$(18) \qquad \gamma_n(z)\leqslant u(z) \quad (n=2,3,\cdots; z\in G')$$

因此，从 (16) 式我们断言，当 $n=2,3,\cdots$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log M_n &= \lim_{z\to\infty}(\log|z|-\gamma_n(z)) \\ &\geqslant \lim_{z\to\infty}(\log|z|-u(z))>-\infty。\end{aligned}$$

于是从(10)式推得 $\operatorname{cap}E=\lim_{n\to\infty}M_n^{\frac{1}{n}}>0$。

若设 $\mathrm{cap}E>0$，则由(18)式推出 $\gamma(z)\leqslant u(z)$。假如序列 $(\gamma_n(z))$ 不收敛，则可选取另一收敛子列，它的极限函数 $\gamma^*(z)\neq\gamma(z)$，并且也满足 $\gamma^*(z)\leqslant u(z)$。分别取 $u-\gamma^*$ 和 $u-\gamma$ 就得出矛盾的结果。

推论 11.1 设 $g(z)=bz+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 在Δ内单叶，$G=g(\Delta)$，$E=\mathbb{C}\setminus G$。则

$$\mathrm{cap}E=|b|,\tag{19}$$

并且 $\gamma(w)=\log|g^{-1}(w)|$ 是G的格林函数。

证 我们有

$$\log|g^{-1}(w)|=\log|w|-\log|b|+O\left(\frac{1}{|w|}\right)(|w|\to\infty).$$

因 $|g^{-1}(w)|>1(w\in G\setminus\{\infty\})$，$|g^{-1}(w)|\to1\ (w\to\partial G)$，故 $\log|g^{-1}(w)|$ 是 $g(\Delta)$ 的格林函数。

宰荷 (Szegö 1924) 的这个结果表明，若紧集E中包含有连续统 E'，则 $\mathrm{cap}E\geqslant\mathrm{cap}E'>0$。从例 1.2 和 1.3 (1.1 节)我们得到

$$\mathrm{cap}\{|w|\leqslant\rho\}=\rho,\quad \mathrm{cap}[a,b]=\frac{1}{4}|b-a|,\tag{20}$$

(21) $\partial\Delta$ 上长度为 α 的弧段的容量为 $\sin\dfrac{\alpha}{4}$.

假如G是多连通区域，并且以其格林函数为实部的解析函数多值．那么，这个解析函数的指数函数是单值函数，并且在用适当割线连接各边界分集所得的一个G的子区域内单叶（例如可参看 Brelot and Choquet 1951，Arsove and Johnson 1970）。

定理 11.2 设函数

$$f(z)=z+a_0+a_1z^{-1}+\cdots\quad(|z|\text{ 充分大})\tag{22}$$

在区域G内亚纯，$E=\mathbb{C}\setminus G$，F 为一紧集.

(a) 若 $f(G)\subset\hat{\mathbb{C}}\setminus F$，则

$$\mathrm{cap}F\leqslant\mathrm{cap}E.\tag{23}$$

(b) 若 $z\to\partial G$ 时 $f(z)$ 的所有极限点属于 F，并且在$G\setminus\{\infty\}$

内 $f(z)$ 无极点，则

$$\operatorname{cap}F \geqslant \operatorname{cap}E. \tag{24}$$

证 (a) 首先设 $f(G)\subset\hat{\mathbf{C}}\backslash F$. 不妨假定 $\beta=\operatorname{cap}F>0$. 设 $\gamma^*(w)$ 是 F 的外区域的格林函数，则由 (13) 与 (21) 式，

$$\begin{aligned}\gamma^*(f(z)) &= \log|f(z)|-\log\beta+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\\ &= \log|z|-\log\beta+O\left(\frac{1}{|z|}\right).\end{aligned}\tag{25}$$

因这一函数在 G 内除对数极点外为正调和函数，故从定理 11.1 推出 $\operatorname{cap}E>0$，并且 $\gamma^*(f(z))\geqslant\gamma(z)$. 比较 (13) 式与 (15) 式又推出 $-\log\beta\geqslant-\log\operatorname{cap}E$；此式蕴含 (23) 式.

(b) 设 $z\to\partial G$ 时 $f(z)$ 的所有极限点属于 F. 不妨设 $\alpha=\operatorname{cap}E>0$. 以 $q_n^*(w)$ 表示紧集 F 的 n 次斐开特多项式，以 M_n^* 表示它在 F 上的最大值. 由 (3), (22) 及 (13) 式有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\log\frac{|q_n^*(f(z))|}{M_n^*}-\gamma(z)\\ &=-\frac{1}{n}\log M_n^*+\log\alpha+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\quad(|z|\to\infty).\end{aligned}\tag{26}$$

因这一函数在 G 内调和，由最大值原理我们有

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{n}\log M_n^*+\log\alpha\\ &\leqslant\limsup_{z\to\partial G}\left(\frac{1}{n}\log\frac{|q_n^*(f(z))|}{M_n^*}-\gamma(z)\right)\\ &\leqslant\max_{w\in F}\frac{1}{n}\log\frac{|q_n^*(w)|}{M_n^*}=0\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即由 (10) 式而推出 (24) 式.

推论 11.2 若单叶函数 $f(z)=z+a_0+\cdots$ 把 E 的外区域映照成 F 的外区域，则

$$\operatorname{cap}E=\operatorname{cap}F. \tag{27}$$

3. 现在我们来证明关于容量的一些估计 (Pólya 1928, 1929,

Ahlfors and Beurling 1950).

引理 11.3 若 C 是长度为 $l(C)$ 的可求长曲线，则

$$l(C) \geqslant 4\operatorname{cap}C. \tag{28}$$

证 设用弧长 s 作参数时曲线 C 的参数表示为 $z=\varphi(s)$. 由长度定义有

$$|\varphi(s_2)-\varphi(s_1)| \leqslant s_2-s_1 \quad (s_2>s_1).$$

因此 $z=\varphi(s)$ 定义了区间 $[0, l(C)]$ 到 C 的一个短缩. 于是由容量的短缩性 (iii) 推出

$$\operatorname{cap}C \leqslant \operatorname{cap}[0, l(C)]$$

而由 (20) 式,后者等于 $\frac{1}{4}l(C)$.

定理 11.3 设 $E\subset\mathbb{C}$ 是紧集，$P\subset\mathbb{R}$ 是 E 到实轴的(正交)投影，则

$$\operatorname{cap}E \geqslant \operatorname{cap}P \geqslant \frac{1}{4}\operatorname{mes}P. \tag{29}$$

若 $E\subset\Delta$，且 $A\subset\partial\Delta$ 是 E 到单位圆周的投影，则

$$\operatorname{cap}E \geqslant \operatorname{cap}A \geqslant \sin\left(\frac{1}{4}\operatorname{mes}A\right). \tag{30}$$

证 (a) 首先考虑 E 到 P 的短缩 $\varphi_1(z)=\operatorname{Re}z$，然后考虑 P 到长度为 $\operatorname{mes}P$ 因而容量为 $\frac{1}{4}\operatorname{mes}P$ 的线段的另一短缩 $\varphi_2(x)=\operatorname{mes}(P\cap(-\infty, x])$，即可建立不等式 (29).

(b) (30) 式的第一个不等式可通过考虑函数 $\varphi(z)=\frac{z}{|z|}$ 而得到;因为 $E\subset\Delta$，这个函数是 E 的一个短缩.

现在来证明 (30) 式的第二个不等式.

设 $\alpha=\operatorname{mes}A$，函数

$$h(z)=\frac{1}{4}\int_A \frac{z+\zeta}{z-\zeta}|d\zeta|$$

$$\left(h(\infty)=\frac{\alpha}{4}, \quad h(0)=-\frac{\alpha}{4}\right)$$

在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash A$ 内解析，并且当 $|z|>1$ 时满足

$$0<\operatorname{Re}h(z)=\frac{1}{4}\int_A\frac{|z|^2-1}{|z-\zeta|^2}|d\zeta|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\int_{\partial\Delta}\frac{|z|^2-1}{|z-\zeta|^2}|d\zeta|=\frac{\pi}{2}$$

类似地，当 $|z|<1$ 时有 $0>\operatorname{Re}h(z)>-\frac{\pi}{2}$. 因此函数

$$g(z)=\frac{e^{ih(z)}-e^{-\frac{i\alpha}{4}}}{e^{ih(z)}+e^{\frac{i\alpha}{4}}}\quad\left(g(\infty)=ie^{-\frac{i\alpha}{4}}\sin\frac{\alpha}{4},\ g(0)=0\right)$$

在 $\hat{\mathbf{C}}\backslash A$ 内解析，并且当 $|z|\neq1$ 时有 $|g(z)|<1$. 且因 $A\subset\{|z|=1\}$，而由最大值原理推出对于 $z\in\hat{\mathbf{C}}\backslash A$ 有 $|z^{-1}g(z)|<1$. 于是，函数

$$f(z)=\frac{zg(\infty)}{g(z)}=z+\cdots$$

对 $z\in\hat{\mathbf{C}}\backslash A$ 满足 $|f(z)|>\sin\frac{\alpha}{4}$，且由定理 11.2 (a) 推出

$$\sin\frac{\alpha}{4}\leqslant\operatorname{cap}A.$$

上述这些估计都是最佳的；当 E 是 $\mathbf{R}$ 上的线段时(28)与(29)式等号成立，当 E 是 $\partial\Delta$ 上的一段弧时(30)式等号成立. 若 E 是连续统，从(29)式推出 $\operatorname{diam}E\leqslant4\operatorname{cap}E$；而另一方面，从(9)式推知对于每个紧集 E 有 $\operatorname{cap}E\leqslant\Delta_2(E)^{\frac{1}{2}}=\operatorname{diam}E$. 实际上，其精确估计为 $2\operatorname{cap}E\leqslant\operatorname{diam}E$（见问题 3）.

4. 现在我们把容量概念推广到 $\mathbf{C}$ 中的任意集合. 集 $E\subset\mathbf{C}$ 的**内容量**和**外容量**定义为

(31) $\qquad\operatorname{cap}_*E=\sup\{\operatorname{cap}A: A\subset E,\ A\text{ 是紧集}\},$

(32) $\qquad\operatorname{cap}^*E=\inf\{\operatorname{cap}_*H: H\supset E,\ H\text{ 是开集}\}.$

显然有 $\operatorname{cap}_*E\leqslant\operatorname{cap}^*E$. 对于 $\partial\Delta$ 上的集，通常只须考虑一种较弱的外容量定义，即在上述定义中 H 只限于取 $\partial\Delta$ 上的开子集. 今

后每当我们说到单位圆周上的集合的外容量时，总是理解为在这种限定意义下的外容量。

引理 11.4 若 E 是紧集，则

$$\mathrm{cap}_* E = \mathrm{cap}^* E = \mathrm{cap} E. \tag{33}$$

证 对 $\varepsilon > 0$，可选取 n 使得

$$\Delta_n(E)^{\frac{1}{n(n-1)}} < \mathrm{cap} E + \varepsilon.$$

由于 Δ_n 是一个有限乘积的最大值，它连续地依赖于集合 E，故可找到 E 的开邻域 H，使得

$$\Delta_n(\overline{H})^{\frac{1}{n(n-1)}} < \Delta_n(E)^{\frac{1}{n(n-1)}} + \varepsilon.$$

因 $\Delta_\nu^{\frac{1}{\nu(\nu-1)}}$ 递减，这就推出

$$\mathrm{cap}_* H = \mathrm{cap} \overline{H} \leqslant \Delta_n(\overline{H})^{\frac{1}{n(n-1)}} < \mathrm{cap} E + 2\varepsilon$$

于是有 $\mathrm{cap}^* E \leqslant \mathrm{cap} E$。又因显然有 $\mathrm{cap} E = \mathrm{cap}_* E \leqslant \mathrm{cap}^* E$，这就推出 (33) 式。

需要指出的是，所有波雷尔集（甚至所有解析集）都是"可定容"的，即满足 $\mathrm{cap}_* E = \mathrm{cap}^* E$ (Choquet 1953—54，参看 Carleson 24 页或 Landkof 156 页)。

现在证明容量具有次可加性 (Nevanlinna 127 页)。

定理 11.4 若集合 $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 的直径小于 d，则

$$\frac{1}{\log \dfrac{d}{\mathrm{cap}^* E}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log \dfrac{d}{\mathrm{cap}^* E_k}}. \tag{34}$$

证 由外容量定义 (32)，我们可以找到开集 $H_k \supset E_k$ 使得

$$\frac{1}{\log \dfrac{d}{\mathrm{cap}_* H_k}} < \frac{1}{\log \dfrac{d}{\mathrm{cap}^* E_k}} + \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{35}$$

于是 $E \subset H = \bigcup H_k$，并且因 $\mathrm{diam} E < d$ 而可假定 $\mathrm{diam} H < d$。

H 的每个紧子集 A 被有限多个 H_k 所覆盖，比如说 $A\subset H_1\cup H_2\cup\cdots\cup H_m$. 因此可以构造 H_k 的紧子集 $A_k(k=1,\cdots,m)$ 使得 $A=A_1\cup\cdots\cup A_m$. 这时有

$$\frac{1}{\log\dfrac{d}{\mathrm{cap}A}}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\log\dfrac{d}{\mathrm{cap}A_k}},\tag{36}$$

这一关系式将在下面予以证明. 因由(31)式有 $\mathrm{cap}A_k\leqslant\mathrm{cap}_*H_k$，从而据(35)式我们得到

$$\frac{1}{\log\dfrac{d}{\mathrm{cap}_*H}}=\sup_{A\subset H}\frac{1}{\log\dfrac{d}{\mathrm{cap}A}}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\log\dfrac{d}{\mathrm{cap}^*E_k}}+\varepsilon,$$

于是由定义(32)推出(34)式.

现在证明(36)式. 我们只对 $m=2$ 的情形给出证明,一般情形可用归纳法推出. 设紧集 $A=A_1\cup A_2$ 的一组 n 般斐开特点 $z_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$ 之中有 l 个属于 A_1，其余 $n-l$ 个属于 A_2. 对 $z_\mu\in A_1$ 和 $z_\nu\in A_2$ 应用估计 $|z_\mu-z_\nu|\leqslant d$，即从(1)式得到

$$\Delta_n(A)\leqslant\Delta_l(A_1)\Delta_{n-l}(A_2)d^{2l(n-l)}$$

在上式取对数并除以 $n(n-1)$，再令 $n\to\infty$ 且可通过选取适当子序列使 $\dfrac{l}{n}\to\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，于是得到

$$\log\mathrm{cap}A\leqslant\lambda^2\log\mathrm{cap}A_1+(1-\lambda)^2\log\mathrm{cap}A_2$$
$$+2\lambda(1-\lambda)\log d.$$

上式右端取关于 λ 的最大值,便得到当 $m=2$ 时的(36)式.

若 $\mathrm{cap}^*E=0$，则称 E 为零容集. $\mathbf{R}$ 上或 $\partial\Delta$ 上的零容集必是零测度集(见定理 11.3),但逆命题不成立(见问题 7).

推论 11.3 若 $\mathrm{cap}^*E_k=0$ $(k=1,2,\cdots)$，则

(37) $$\operatorname{cap}^*\left(\bigcup_k E_k\right)=0$$

证 若并集 E 有界，这一结论可立即从定理 11.4 推出。若 E 无界，则我们可构造出开集 H_n 的递增序列使得 $E\cap\{|z|<n\}\subset H_n$ 且 $\operatorname{cap}^*H_n<\varepsilon$。于是有 $E\subset H=\bigcup_n H_n$。若 A 是 H 的紧子集，则对某个 n 有 $A\subset H_n$，从而 $\operatorname{cap}A\leqslant\operatorname{cap}^*H_n<\varepsilon$。因此 $\operatorname{cap}^*H<\varepsilon$，故由(32)式知 $\operatorname{cap}^*E=0$。

进一步的结果可参看尼凡林那、卡列松和楚济的书（Nevanlinna, Carleson, Tsuji）。一个有关的重要概念——解析容量，是阿尔福斯和贝尔林引入的（Ahlfors and Beurling 1956），也可参看格尔内特（Garnett）的书。

问 题

1. 设 $E\subset\partial\Delta$ 且关于 $\mathbb{R}$ 对称。证明集 E 在 $\mathbb{R}$ 上的投影 P 满足 $2\operatorname{cap}P\leqslant(\operatorname{cap}E)^2$ (Robinson 1969)。

2. 设 E 是一个连续统且包含 $\bar{D}$ 及点 $a>1$。试证：

$$\operatorname{cap}E\geqslant\frac{(1+a)^2}{4a},$$

当 $E=\bar{D}\cup[1,a]$ 时等号成立（先应用推论 11.2 于 $z+z^{-1}$，然后再用定理 11.3）。

3. 试证： $\operatorname{diam}E\geqslant 2\operatorname{cap}E$。
（若 E 为凸集时，可考虑 $g(z)-g(-z)$）

4. 设 $g\in\Sigma$，$E=\mathbb{C}\backslash g(\Delta)$。试证明：对某个绝对常数 K 有

$$n^n\leqslant\Delta_n(E)<(K\log n)^n n^n\quad(n=2,3,\cdots);$$

并证明：若 E 是解析若当曲线，则

$$\Delta_n(E)<\operatorname{const}\cdot n^n.$$

(Pommerenke 1964a；对非连续集的 Δ_n 的上述估计是珍生(Jensen 1969)证明的。考虑

$$\prod_{\mu}\prod_{\nu\neq\mu}[g(e^{2\pi i\mu/n}z)-g(e^{2\pi i\nu/n}z)]$$

以证明下界估计;应用定理3.11于一个适当的行列式以证明下界估计)。

5. 设 $p(z)=z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_0$. 试证明：若 F 是紧集，则

$$\operatorname{cap} p^{-1}(F)=(\operatorname{cap} F)^{\frac{1}{m}};$$

并证明：

$$\operatorname{cap}\{z:|p(z)|\leqslant 1\}=1.$$

(Fekete 1930).

6. 试从定理11.4推证出：若 E 为对数测度零集，即对每个 $\varepsilon>0$，存在可数多个直径 $d_k<1$ 的圆盘覆盖 E，使得

$$\sum_k \frac{1}{\log\frac{1}{d_k}}<\varepsilon,$$

则 $\operatorname{cap}^* E=0$（爱尔端斯和吉利斯（Erdös and Gillis 1937）曾证明，只需假定 E 具有有限对数测度即可）。

7. 设 E_k 是紧集（$k=1,2,\cdots,m$）. 试证：

$$[\operatorname{cap}(E_1\cup\cdots\cup E_m)]^{m^2}\geqslant \prod_{k\neq j}\prod \operatorname{dist}(E_k,E_j)\prod_{k=1}^{m}\operatorname{cap}E_k;$$

并证明经典康托集(熟知的零测度集)具有正容量(参看 Nevanlinna 155 页)。

8. 设 E 是零容紧集. 试证明存在 $\mathbf{C}\setminus E$ 内的调和函数 $u(z)$，使得

$$u(z)=\log|z|+\cdots(|z|\to\infty),\quad u(z)\to-\infty\ (z\to E)$$

(这样的函数称为爱凡司 (Evans) 函数，参看 Tsuji 75 页)。

9. 设 $f(z)$ 在 D 内亚纯且不是常数，E 是紧集且 $\operatorname{cap}E=0$. 假定 $f(z)$ 在集 $A\subset\partial D$ 的每一点都具有值在 E 中的角极限. 试证：$\operatorname{mes}A=0$ (Privalov 210 页；求出以爱凡司函数为实部的解析函数，将 $f(z)$ 与这个解析函数的指数函数复合，然后应用定理10.14)。

10. 设 $g(\zeta)=\zeta+b_0+\cdots$ 在 $1<|\zeta|<\infty$ 内解析. 试证：

$$\operatorname{cap}\{r:\{|w|=r\}\not\subset g(\Delta)\}\leqslant 1.$$

并证明由海曼 (Hayman 1951) 给出的寇勃 1/4 定理的如下推广：若

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots$$

在 D 内解析，则

$$|a_0|+\operatorname{mes}\{r:\{|w|=r\}\subset f(D)\}\geqslant\frac{1}{4}|a_1|.$$

11.2 边界性质与容量

1. 现在证明关于径向极限与容量的某些结果。在9.1节中我们曾看到，对于单叶函数来说，角极限、径向极限和渐近值是等价的概念。在9.2节我们又证明了径向极限存在当且仅当相应的素端只有一个主点。下列结果要比10.3节的那些结果更强一些，因为一般地说测度要比容量小得多。

定理 11.5 设 $g\in\Sigma$ 且 $\lambda\geqslant 6$. 则

(1) $$\int_1^2|g'(r\zeta)|dr\leqslant\lambda\quad(\zeta\in\partial\Delta\backslash A),$$

其中除外集 A 满足

(2) $$\operatorname{cap}^* A\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{3}}.$$

因而至多除去一个零容集外 $g(z)$ 的径向极限存在。

关于径向极限存在性的这一结果属于贝尔林(Beurling 1940)。其证明只需用到这样的事实：函数 $g(z)=z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots$ 满足面积定理中的不等式(1.2.5)，即

(3) $$\sum_{k=1}^{\infty}k|b_k|^2\leqslant 1.$$

证 (a) 设 $\zeta\in A$. 则因(1)式的积分大于 λ，由连续性，我们可以找到 $\rho(\zeta)>1$ 和 $\delta(\zeta)>0$，使得

(4) $$\int_{\rho(\zeta)}^2|g'(rz)|dr>\lambda\quad(z\in U(\zeta))$$

其中 $U(\zeta)=\{z\in\partial\Delta:|z-\zeta|<\delta(\zeta)\}$. 集合 $V=\bigcup\limits_{\zeta\in A}U(\zeta)$ 包含 A 并且是相对于 $\partial\Delta$ 的开集. 因此，为了证明(2)式，我们只需证明对集合 V 的每个紧子集 B 有 $\operatorname{cap}B<e^{-\frac{\lambda^2}{3}}$ 即可. 由于 B 被有限条圆弧 $U(\zeta)$ 所覆盖，故从(4)式推知对某个 $\rho>1$ 有

(5) $$\int_\rho^2|g'(rz)|dr>\lambda\quad(z\in B).$$

(b) 设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 B 的一组 n 级蜚尕特点，且 $c_\nu(r) = \exp[-i\arg g'(rz_\nu)]$，则由(5)式有

$$n\lambda < \sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 |g'(rz_\nu)| dr = \sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 c_\nu(r) g'(rz_\nu) dr$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 c_\nu(r) dr - \sum_{k=1}^{\infty} k b_k$$

$$\cdot \left[\sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 c_\nu(r)(rz_\nu)^{-k-1} dr \right]$$

因 $|c_\nu(r)| = 1$，第一个和的模以 n 为上界；对第二个和应用薛瓦尔兹不等式，便从(3)式得到

$$(6) \qquad n^2(\lambda - 1)^2 < \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} k|[\cdots]|^2$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k \overline{[\cdots]} [\cdots]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 \int_\rho^2 \overline{c_\mu(s)} c_\nu(r) (rs\bar{z}_\mu z_\nu)^{-k-1} ds dr$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_\rho^2 \int_\rho^2 \frac{\overline{c_\mu(s)} c_\nu(r)}{(rs\bar{z}_\mu z_\nu - 1)^2} ds dr.$$

(c) 现在我们证明

$$(7) \quad \int_\rho^2 \int_\rho^2 \frac{ds dr}{|rse^{i\theta} - 1|^2} \leqslant \begin{cases} 2\log \dfrac{1}{\rho - 1} & (\theta = 0) \\ 1 + 2\log \dfrac{1}{|e^{i\theta} - 1|}{}^{1)} & (0 < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

由积分的对称性，它

1) 此式有误，似应改作 $\log 9 - \frac{2}{3} + 2\log \frac{1}{|e^{i\theta} - 1|}$，定理中的结论(2)相应要修改为 $\operatorname{cap}^* A \leqslant \exp\left[-\frac{1}{36}\left(\frac{77}{6} - \log 3\right)\lambda^2\right]$。——译者注

$$= 2\int_\rho^2\int_\rho^r \frac{ds}{|rse^{i\theta}-1|^2}\,dr \leqslant 2\int_\rho^2 \frac{r-1}{|re^{i\theta}-1|^2}\,dr$$

因此，当 $\theta=0$ 时 (7) 式显然成立。当 $0<\theta<2\pi$ 时，$|re^{i\theta}-1| \geqslant |e^{i\theta}-1| = \sigma$，$|re^{i\theta}-1| \geqslant r-1$，故最后一个积分

$$\leqslant \int_1^{1+\sigma} \frac{r-1}{\sigma^2}\,dr + \int_{1+\sigma}^2 \frac{1}{r-1}\,dr$$

$$= \frac{1}{2} + \log\frac{1}{\sigma}.$$

(d) 由于 $|c_\nu|=1$，$|z_\nu|=1$，故从(6)式，(7)式，以及 n 级判别式的定义 (11.1.1) 我们推出

$$n^2(\lambda-1)^2 < 2n\log\frac{1}{\rho-1}$$

$$+ \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(1+2\log\frac{1}{|z_\mu-z_\nu|}\right)$$

$$= 2n\log\frac{1}{\rho-1} + n(n-1) + 2\log\frac{1}{\Delta_n(B)}.$$

除以 $n(n-1)$，再令 $n\to\infty$，即由 (11.1.9) 式得到

$$(\lambda-1)^2 \leqslant 1 + 2\log\frac{1}{\operatorname{cap}B}$$

由于 $\lambda\geqslant 6$，故推出 $\operatorname{cap}B \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{3}}$.

最后，根据 (2) 式，当 $6\leqslant\lambda<+\infty$ 时所有例外集的交是零容集。如果 ζ 不属于这个值，则 (1) 式的积分有限，故径向极限存在。

2. 下一个定理给出一个反方向的结果 (Schiffer 1946, Pommerenke 1968b)。

定理 11.6 设 $g\in\Sigma$，$E\subset\mathbf{C}$ 且 $A\subset\partial\Delta$。如果对于每一点 $\zeta\in A$，集合 $\{g(r\zeta): 1<r<+\infty\}$ 的闭包与 E 相交，则

$$\operatorname{cap}^*E \geqslant (\operatorname{cap}^*A)^2 \geqslant \sin^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{mes}^*A\right). \tag{8}$$

我们以 $g(A)$ 表示所有 $\zeta\in A$ 的径向极限 $g(\zeta)$ 的集合；由

定理 11.5 知径向极限存在，至多有一个零容子集例外。

推论 11.4 设 $g\in\Sigma$，$A\subset\partial\Delta$，则

(9) $$\operatorname{cap}^* g(A)\geqslant(\operatorname{cap}^* A)^2.$$

这一不等式可立即从(8)式推出，因为由定理 11.4，$\operatorname{cap}^* A$ 的值不因除去一个零容集而改变。特别可得出杜甫莱斯诺伊的一个属于唯一性类型的结果 (Dufresnoy 1945)：$\operatorname{cap}^* A>0$ 蕴含

$$\operatorname{cap}^* g(A)>0.$$

定理 11.6 的证明 (a) 对 $\varepsilon>0$，选取开集 H 满足 $E\subset H$，$\operatorname{cap}_* H<\operatorname{cap}^* E+\varepsilon$。由于对 $\zeta\in A$，集合 $\{g(r\zeta):1<r<+\infty\}$ 的闭包与 E 相交，因而对于某个 $r(\zeta)>1$ 有 $g(\zeta r(\zeta))\in H$。于是由连续性即得

(10) $$g(zr(\zeta))\in H\quad(z\in\overline{U(\zeta)},\ \zeta\in A)$$

其中 $U(\zeta)=\{z\in\partial\Delta:|z-\zeta|<\delta(\zeta)\}$，$\delta(\zeta)>0$ 充分小。

集合 $V=\bigcup_{\zeta\in A}U(\zeta)$ 是相对于 $\partial\Delta$ 的开集并且包含 A。设 B' 是 V 的一个紧子集，则不妨假定

$$B'\subset U(\zeta_1)\cup\cdots\cup U(\zeta_m).$$

于是集合

(11) $$B=\bigcup_{k=1}^{m}\{zr(\zeta_k):z\in\overline{U(\zeta_k)}\}\subset\Delta$$

是一个紧集，它在 $\partial\Delta$ 上的投影 B^* 包含 B'。下面将证明

(12) $$\operatorname{cap} g(B)\geqslant(\operatorname{cap} B^*)^2.$$

因此，由于从(10)式知紧集 $g(B)$ 包含于 H 而推出

(13) $$\begin{aligned}(\operatorname{cap} B')^2&\leqslant(\operatorname{cap} B^*)^2\leqslant\operatorname{cap} g(B)\\&\leqslant\operatorname{cap}_* H<\operatorname{cap}^* E+\varepsilon.\end{aligned}$$

又因 $A\subset V$，我们有

$$\begin{aligned}(\operatorname{cap}^* A)^2&\leqslant(\operatorname{cap}_* V)^2=\sup_{B'\subset V}(\operatorname{cap} B')^2\\&\leqslant\operatorname{cap}^* E+\varepsilon\end{aligned}$$

因而有 $(\operatorname{cap}^* A)^2\leqslant\operatorname{cap}^* E$。而(8)式的最后一个不等式则容易从

(11.1.30) 式推出。

(b) (12) 式的证明基于戈鲁辛不等式(3.2节)。设 $z_1, \cdots, z_n$ 是 B^* 的一组 n 级斐开特点。由 (11) 式，可以找到与 n 无关的 $r>1$ 及 $r_\nu \geqslant r$ 使得 $z_\nu r_\nu \in B(\nu=1,\cdots,n)$。根据推论 3.3，有

(14) $$\prod_{\nu=1}^{n}|g'(r_\nu z_\nu)|\prod_{\mu\neq\nu}\prod\left|\frac{g(r_\mu z_\mu)-g(r_\nu z_\nu)}{r_\mu z_\mu - r_\nu z_\nu}\right| \geqslant \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{1}{r_\nu^2}\right)\prod_{\mu\neq\nu}\prod\left|1-\frac{\bar z_\mu z_\nu}{r_\mu r_\nu}\right|.$$

由于从(3.2.5)式知 $|g'(r_\nu z_\nu)|\leqslant(1-r_\nu^{-2})^{-1}\leqslant(1-r^{-2})^{-1}$，且因 $s>0$ 时有 $|z_\mu s - z_\mu s^{-1}|\geqslant|z_\mu - z_\nu|$，以及 $|r_\mu z_\mu - r_\nu z_\nu|\left|1-\frac{\bar z_\mu z_\nu}{r_\mu r_\nu}\right|\geqslant|z_\mu - z_\nu|^2$，故从 (14) 式得到

$$\prod_{\mu\neq\nu}\prod|g(r_\mu z_\mu)-g(r_\nu z_\nu)| \geqslant \left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{2n}\prod_{\mu\neq\nu}\prod|z_\mu - z_\nu|^2$$

又由于 $g(r_\nu z_\nu)\in g(B)$，根据 (11.1.1) 式我们推出

$$\Delta_n(g(B)) \geqslant \left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{2n}\Delta_n(B^*)^2,$$

取 $n(n-1)$ 次方根且令 $n\to\infty$，即得到 (12) 式。

下面我们来证明一个与引理 9.6 (见 9.2 节)相对的结果，这个结果属于拉甫伦捷夫(可参看 Gattègno and Ostrowski 1949a，21页)。

推论 11.5 设 $g\in\Sigma$ 且 $z_1, z_2\in\partial\Delta$。如果 $g(\Delta)$ 的横截线 C 同时把 $g(z_1)$ 和 $g(z_2)$ 同∞分隔开，则

(15) $$l(C)\geqslant\frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$$

证 由于Δ的横截线 $g^{-1}(C)$ 把 z_1 和 z_2 同∞分隔开，它在$\partial\Delta$上的投影的长度不小于 α，此处 α 满足 $|z_1 - z_2| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$，$0\leqslant\alpha\leqslant\pi$。因而从引理 11.3，定理 11.3 及定理 11.6 推出

$$l(C) \geqslant 4\operatorname{cap} C \geqslant 4\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

$$\geqslant \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2.$$

现在我们来建立一个与(11.1.34)式不同的次可加性质(Schiffer 1941, Pommerenke 1968b).

推论 11.6 设E是连续统且 $E = E_1 \cup E_2$. 则

(16) $$\operatorname{cap} E \leqslant \operatorname{cap}^* E_1 + \operatorname{cap}^* E_2.$$

证 不妨设 $\operatorname{cap} E = 1$. 由推论 11.1, 在 Σ 中存在函数 g 把 Δ 映照成 E 的外区域. 我们把 $r \to 1+0$ 时 $g(r\zeta)$ 有某个极限点属于 E_j 的那些 $\zeta \in \partial\Delta$ 的集合记为 $A_j (j = 1, 2)$, 于是有 $A_1 \cup A_2 = \partial\Delta$. 令 $\alpha = \operatorname{mes}^* A_1$, 则 $\operatorname{mes}^* A_2 \geqslant 2\pi - \alpha$. 因而从 (8) 式推出

$$\operatorname{cap}^* E_1 + \operatorname{cap}^* E_2 \geqslant \sin^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right) = 1.$$

例 设函数 $h(z) = bz + \cdots$ $(b > 0)$ 把 Δ 一一映照为 $\{|w| > r\} \setminus [r, 2 - r + 2\sqrt{1-r}]$ $(0 < r < 1)$. 则

$$h(z) + r^2 h(z)^{-1} = z + 2(1 - r) + z^{-1},$$

这是因为等号两边的函数都把Δ映照成 $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-2r, 4 - 2r]$. 于是推出 $b = 1$. 设 $A = \{e^{i\theta}: \beta \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \beta\}$ $(\cos\beta = 2r - 1)$, 则 $h(A) = \{|w| = r\}$, 并且由(11.1.21)式知 $\operatorname{cap} A = \sqrt{r}$.

设 E 是某个局部连通的连续统, $\operatorname{cap} E = r < 1$, 并且是它的外区域$G$的余集. 若函数 $g^*(w) = w + \cdots$ 把 $\{|w| > r\}$ 映照成 G, 则 $g(z) = g^*(h(z))$ 属于Σ并且在 $\bar{\Delta}$ 上连续. 而且 $g(A) = g^*(h(A)) \supseteq \partial E$, 因而有

(17) $$\operatorname{cap} g(A) = \operatorname{cap} E = r = (\operatorname{cap} A)^2.$$

因此,使得定理 11.6 等号成立的函数 $g \in \Sigma$ 不仅存在而且很多.

3. 联系拟共形扩张,对于 $\Sigma(\kappa)$ 类可以证明更精确的估计式(见 9.4 节及 Kühnau 1971b).

定理 11.7 设 $g \in \Sigma(\kappa)$ $(0 \leqslant \kappa \leqslant 1)$. 如果 $A \subset \Delta$ 是一个紧

集，$\rho=\max\{|z|:z\in A\}$，则

(18) $$\rho^{-2\kappa}(\operatorname{cap}A)^{1+\kappa}\leqslant\operatorname{cap}g(A)\leqslant\rho^{2\kappa}(\operatorname{cap}A)^{1-\kappa}.$$

证 取 $z_\nu\in A$，$\gamma_\nu=1$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 从 (9.4.5) 式推出

$$\prod_{\mu\neq\nu}\prod\left|\frac{g(z_\mu)-g(z_\nu)}{z_\mu-z_\nu}\right|\prod_\nu|g'(z_\nu)|$$
$$\leqslant\prod_{\mu\neq\nu}\prod\left|1-\frac{1}{z_\mu\bar{z}_\nu}\right|^{-\kappa}\prod_\nu\left(1-\frac{1}{|z_\nu|^2}\right)^{-\kappa}.$$

因对于某个 $r>1$ 有 $A\subset\{r\leqslant|z|<\rho\}$，故由 (3.2.5) 式有

$$|g'(z_\nu)|\geqslant1-r^{-2},$$

又因

$$|1-(z_\mu\bar{z}_\nu)^{-1}|\geqslant|z_\mu^{-1}-z_\nu^{-1}|\geqslant\rho^{-2}|z_\mu-z_\nu|$$

从而推出

$$\prod_{\mu\neq\nu}\prod|g(z_\mu)-g(z_\nu)|\leqslant\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{-2n}\rho^{2\kappa n(n-1)}$$
$$\cdot\prod_{\mu\neq\nu}\prod|z_\mu-z_\nu|^{1-\kappa},$$

若 $g(z_\nu)(\nu=1,\cdots,n)$ 是 $g(A)$ 的一组 n 级斐开特点，我们就到得

$$\Delta_n(g(A))\leqslant\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{-2n}\rho^{2\kappa n(n-1)}\Delta_n(A)^{1-\kappa}.$$

取 $n(n-1)$ 次方根且令 $n\to\infty$，即得(18)式的第二个不等式。(18) 式的第一个不等式可以用类似的方法证明。

推论 11.7 设 $0\leqslant\kappa<1$。若 $g\in\Sigma(\kappa)$，并且 $z_1, z_2\in\partial\Delta$，则

(19) $$\gamma|z_1-z_2|^{1+\kappa}\leqslant|g(z_1)-g(z_2)|\leqslant4|z_1-z_2|^{1-\kappa}$$

其中 $\gamma>0$ 是只依赖于 κ 的常数。

当 $\kappa=1$ 时，第一个不等式显然不成立，第二个不等式是平凡的。估计式(19)中的指数比起相应的关于拟共形映照的一般不等式中的指数 $\frac{1+\kappa}{1-\kappa}$ 和 $\frac{1-\kappa}{1+\kappa}$ 要更好些 (Lehto-Virtanen 73 页)。

证 若 A 是圆周 $\{|z|=r\}(r>1)$ 上点 rz_1 和 rz_2 之间较

短的那段圆弧，则由 (18) 式知

$$|g(rz_1)-g(rz_2)|\leqslant \operatorname{diam} g(A)$$
$$\leqslant 4\operatorname{cap} g(A)\leqslant 4r^{2\kappa}|z_1-z_2|^{1-\kappa}.$$

令 $r\to 1$ 即得 (19) 式的第二个不等式。

由于 $\operatorname{diam} g(A)\geqslant \operatorname{cap} g(A)$，从 (18) 式我们推出当 $A\subset\Delta$ 时有

$$\operatorname{diam} g(A)\geqslant \rho^{-2}(\operatorname{cap} A)^{1+\kappa}.$$

而由连续性，这个不等式对 $\rho=1$ 和 $A\subset\partial\Delta$ 也成立。如果 $g(A)$ 是曲线 $g(\partial\Delta)$ 上点 $g(z_1)$ 和 $g(z_2)$ 之间较短的那段弧，则由(9.4.1)式和 (11.1.30) 式得到

$$|g(z_1)-g(z_2)|\geqslant \frac{1}{K}\operatorname{diam} g(A)$$
$$\geqslant \frac{1}{K}(\operatorname{cap} A)^{1+\kappa}\geqslant \frac{1}{16K}|z_1-z_2|^{1+\kappa},$$

并且正如定理 9.12 的证明中所指出的，常数 K 只依赖于 κ。

4. 对于有界函数，我们证明一个与定理 11.6 相类似的结果.

引理 11.5 设 $\varphi(z)$ 在 D 内单叶，$\varphi(0)=0$，$|\varphi(z)|<1$. 若 $A\subset\partial D$，$E=\varphi(A)$（径向极限的集），且令 $\tilde{E}=\left\{\frac{1}{\bar{w}}:w\in E\right\}$，则

$$\operatorname{cap}^*(E\cup\tilde{E})\geqslant\frac{\operatorname{cap}^* A}{\sqrt{|\varphi'(0)|}}. \tag{20}$$

证 设 $B\subset\{|z|\leqslant r\}$ 是紧集，$F=\varphi(B)\cup\widetilde{\varphi(B)}$. 假定 $z_\nu(\nu=1,\cdots,n)$ 是 B 的一组 n 级斐开特点，$w_\nu=\varphi(z_\nu)$. 应用推论 4.3(4.2 节)取 $\gamma_\nu=\sqrt{2}$，我们有

$$|\varphi'(0)|^{2n^2}\prod_{\mu\neq\nu}\prod|w_\mu-w_\nu|\left|w_\mu-\frac{1}{\bar{w}_\nu}\right|\left|w_\nu-\frac{1}{\bar{w}_\mu}\right|$$
$$\cdot\left|\frac{1}{\bar{w}_\mu}-\frac{1}{\bar{w}_\nu}\right|\prod_\nu\left|w_\nu-\frac{1}{\bar{w}_\nu}\right|^2$$

$$\geqslant \prod_{\mu \neq \nu} \prod |1 - z_\mu \bar{z}_\nu|^2 |z_\mu - z_\nu|^2$$

$$\cdot \prod_\nu (1 - |z_\nu|^2)^2 \left| \frac{\varphi(z_\nu)}{z_\nu^2 \varphi'(z_\nu)} \right|^2$$

$$\geqslant (1 - r)^{4n} \prod_{\mu \neq \nu} \prod |z_\mu - z_\nu|^4$$

其中我们用到了(3.2.10)式. 由于 w_ν, $\frac{1}{\bar{w}_\nu} \in F$, 根据(11.1.1)式推出

$$|\varphi'(0)|^{2n^2} \Delta_{2n}(F) \geqslant (1 - r)^{4n} \Delta_n(B)^4.$$

取 $2n(2n-1)$ 次方根再令 $n \to \infty$ 即得

$$\sqrt{|\varphi'(0)|}\, \mathrm{cap} F \geqslant \mathrm{cap} B. \tag{21}$$

用类似于定理 11.6 证明中第一部分的方法，我们从这个不等式即可推出 (20) 式.

定理 11.8 设 $\varphi(z)$ 在 D 内单叶，$\varphi(0) = 0$，$|\varphi(z)| < 1$. 如果 $A \subset \partial D$，并且 $\varphi(A) \subset \partial D$，则

$$\mathrm{cap}^* \varphi(A) \geqslant \frac{\mathrm{cap}^* A}{\sqrt{|\varphi'(0)|}} \geqslant \mathrm{cap}^* A. \tag{22}$$

由于在这种情形下有 $E = \tilde{E}$，故这一不等式可立即从 (20) 式推出. 若 $\varphi(z)$ 在弧 A 上连续且 $\varphi(A) \subset \partial D$，则由 (22) 式和 (11.1.21) 式得到

$$\sin \frac{l(\varphi(A))}{4} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|\varphi'(0)|}} \sin \frac{l(A)}{4} \tag{23}$$

(Komatu 1942, Jenkins 1956). 设集 A 如前面的例中所定义，$h \in \Sigma$. 则函数

$$\varphi(z) = \frac{r}{h(z^{-1})} = rz + \cdots \quad (z \in D; 0 < r < 1)$$

使 (23) 式等号成立，从而使 (22) 式等号成立.

作为定理 11.8 的一个应用，若 $c \notin \varphi(D)$ 则有

$$|\varphi'(0)| \leqslant 4|c|(1 + |c|)^{-2}$$

（见 1.2 节问题B）．因对于 $\varphi(A)\subset\partial D$ 有 $\mathrm{cap}^*\varphi(A)\leqslant 1$，故从（11.1.30）式和（22）式推出

$$\sin\left(\frac{1}{4}\,\mathrm{mes}^*A\right)\leqslant \mathrm{cap}^*A\leqslant\frac{2\sqrt{|c|}}{1+|c|}. \tag{24}$$

这一估计式与关于调和测度（见 10.3 节）的密劳克司问题有密切的联系（见问题10）．

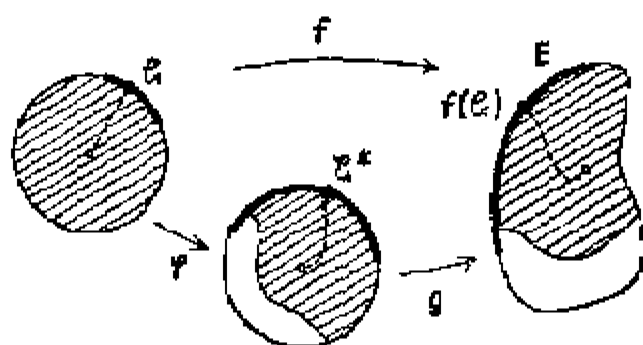


图 11.1

下面关于从属性（见 2.1 节）的一个结果是用容量表述的卡列曼区域扩张原理（Nevanlinna 69 页）。约定

$$f^{-1}(E)=\{\zeta\in\partial D:\ \text{径向极限}\ f(\zeta)\in E\}$$

推论 11.8 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内单叶．若 $f(z)\prec g(z)$，则

$$\frac{\mathrm{cap}^*f^{-1}(E)}{\sqrt{|f'(0)|}}\leqslant\frac{\mathrm{cap}^*g^{-1}(E)}{\sqrt{|g'(0)|}}\quad(E\subset\partial g(D)). \tag{25}$$

证 （参看图 11.1）由从属性定义有 $f(z)=g(\varphi(z))$，$\varphi(0)=0$，$|\varphi(z)|<1$．若 $\zeta\in A=f^{-1}(E)$，则当 $z\in R(\zeta)=[0,\zeta)$，$z\to\zeta$ 时有 $f(z)\to f(\zeta)$．因此，当 $z^*\in\varphi(R(\zeta))$，$|z^*|\to 1$ 时有 $g(z^*)\to f(\zeta)$；由于 $f(\zeta)\in E\subset\partial g(D)$，故有 $|z^*|=|\varphi(\zeta)|\to 1$．因每个单叶函数都正规（引理 9.3），知曲线 $\varphi(R(\zeta))$ 以 $\zeta^*\in\partial D$ 为终点（推论 9.2），因而径向极限 $\varphi(\zeta)=\zeta^*$ 和 $g(\zeta^*)=f(\zeta)$ 都存在（定理 9.3）．

于是 $\varphi(A)\subset B=g^{-1}(E)$．由 $f'(0)=\varphi'(0)g'(0)$ 及定理 11.8，我们推出

$$\mathrm{cap}^*B\geqslant\mathrm{cap}^*\varphi(A)\geqslant\left|\frac{g'(0)}{f'(0)}\right|^{\frac{1}{2}}\mathrm{cap}^*A,$$

这就证明了(25)式。

5. 最后我们证明定理10.8的一种更强的表述，测度代之以容量。

定理 11.9 设$f\in S$, $\varepsilon>0$. 则

$$\int_0^1 |f'(re^{i\theta})|\,dr \leqslant K(\varepsilon) \quad (\zeta\in\partial D\setminus A)$$

其中$K(\varepsilon)$是只依赖于ε的常数；例外集A满足 $\mathrm{cap}^*A<\varepsilon$。

证 设 $g(z)=\dfrac{1}{f(z^{-1})}$, $\lambda\geqslant 6$. 从定理11.6，令 $E=\{|w|\leqslant\lambda^{-2}\}$，我们推知

$$|g(\rho\zeta)|\geqslant \frac{1}{\lambda^2}\quad (\zeta\in\partial\Delta\setminus A_1,\ 0<\rho<\infty)$$

其中例外集 A_1 满足 $\mathrm{cap}^*A_1\leqslant\frac{1}{\lambda}$. 因此对 $\zeta\in A_1$ 有

$$\int_{\frac12}^1 |f'(r\zeta)|\,dr = \int_1^2 \left|\frac{g'(\rho\zeta)}{g(\rho\zeta)^2}\right| d\rho$$
$$\leqslant \lambda^4\int_1^2 |g'(\rho\zeta)|\,d\rho.$$

根据定理11.5，当 $\zeta\notin A_2$ 时最后一个积分不大于 λ，这里的例外集 A_2 满足 $\mathrm{cap}^*A_2\leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{3}}<\frac{1}{\lambda}$. 由于 $|z|\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $|f'(z)|\leqslant 12$，从而对于 $\zeta\notin A=A_1\cup A_2$ 我们得到

$$\int_0^1 |f'(r\zeta)|\,dr \leqslant 6+\int_{\frac12}^1 |f'(r\zeta)|\,dr$$
$$\leqslant 6+\lambda^5\leqslant\lambda^6.$$

而由定理11.4我们有

$$\frac{1}{\log\dfrac{2}{\mathrm{cap}^*A}}\leqslant\frac{1}{\log\dfrac{2}{\mathrm{cap}^*A_1}}+\frac{1}{\log\dfrac{2}{\mathrm{cap}^*A_2}}$$
$$\leqslant\frac{2}{\log(2\lambda)},$$

于是 $\operatorname{cap}^* A \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}$. 由于 λ 可取得任意大，这就证明了定理。

问　　题

1．利用寇勒函数证明：在定理 11.5 中，若以 S 代替 Σ，并且在区间 $[0,1]$ 上积分，那么例外集的容量可以达到 $\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}$.

2．若 $B\subset\Delta$ 是紧集，$g\in\Sigma$. 则

$$\operatorname{cap} g(B)\geqslant\left(\operatorname{cap}\left\{\frac{1}{z}: z\in B\right\}\right)^{2}.$$

并证明：

$$\operatorname{cap}^* f(A)\geqslant\frac{1}{16}(\operatorname{cap}^* A)^{2}\quad(f\in S,\ A\subset\partial D).$$

3．设 $E_1,\cdots,E_n$ 和 $E=E_1\cup\cdots\cup E_n$ 都是连续集。试证：

$$\operatorname{cap} E\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\operatorname{cap} E_{\nu}.$$

并证明：若连续统 E 是总长度为 l 的有限条可求长弧段的并，则 $\operatorname{cap} E\leqslant\dfrac{l}{4}$ (Pommerenke 1968b)。

4．设 $g\in\Sigma$，并且 $|g'(z)|\geqslant\alpha>0$. 试从戈鲁辛不等式推出

$$\Delta_n(\mathbb{C}\setminus g(\Delta))\leqslant\left(\frac{e}{\alpha}\right)^{n}n^{n}\quad(n=2,3,\cdots)$$

5．设 $g\in\Sigma$ 且 $G=g(\Delta)\setminus\{\infty\}$. 玛楚尔凯维支的素端度量 (Mazurkiewicz 1936) 定义为

$$\rho(w_1,w_2)=\inf_{C}\operatorname{diam} C\quad(w_1,w_2\in G),$$

其中 C 是把 w_1 和 w_2 同 ∞ 分隔开的若当曲线或 G 的横截线（对照 Ohtsuka 263 页）。试证明：对于 $1<|z_j|<2$ $(j=1,2)$ 有

$$\gamma|z_1-z_2|^{2}\leqslant\rho(g(z_1),g(z_2))\leqslant\frac{K}{\sqrt{\log\dfrac{3}{|z_1-z_2|}}}$$

其中 γ 和 K 是正绝对常数。并证明：实量空间 (G,ρ) 的完备化空间与 G 并上它的卡氏边界所得的集同胚。

6. 试证明：由拟共形曲线界成的区域间的共形映照使零容集对应零容集，并且零容集的原像集也必是零容集.

7. 设 $g\in\Sigma(\kappa)$ $(0\leqslant\kappa\leqslant1)$，$A$ 是 $\partial\Delta$ 的紧子集. 试应用问题11.1.3证明:

$$\operatorname{diam}g(A)\geqslant 2(\operatorname{cap}A)^{1+\kappa}.$$

8. 设 $g\in\Sigma(\kappa)(0\leqslant\kappa\leqslant1)$，$A\subset\partial\Delta$. 试证明：若 $g(A)$ 的 $(1+\kappa)^{-1}$ 维豪斯道夫测度为零（即对于每个 $\varepsilon>0$，$g(A)$ 能够被可数个圆盘 D_k 所覆盖，这些圆盘的直径满足 $\sum_k(\operatorname{diam}D_k)^{\frac{1}{1+\kappa}}<\varepsilon$），则 $\operatorname{meas}A=0$.（其有关结果可参阅 Matsumotu 1964，carleson 1973，McMillan and Piranian 1973，Blevins 1973.）

9. 设 $g\in\Sigma(\kappa)(0\leqslant\kappa\leqslant1)$，$A$ 和 B 是集合 $\{1<|z|\leqslant\rho\}$ 的紧子集. 求证:

$$\operatorname{cap}g(A)\operatorname{cap}g(B)\leqslant 4\rho^{4\kappa}\max_{a\in A,b\in B}\left|\frac{g(a)-g(b)}{a-b}\right|^{2}(\operatorname{cap}A\operatorname{cap}B)^{1-\kappa}.$$

（应用(9.4.5)式，当 $1\leqslant\nu\leqslant m$ 时取 $\gamma_\nu=1$，$z_\nu\in A$，当 $m<\nu\leqslant2m$ 时取 $\gamma_\nu=-1$，$z_\nu\in B$.）

10. 设 G 是 D 的一个单连通子区域，$0\notin G$. 试从(24)式推出

$$\omega(z,D\cap\partial G,G)\geqslant\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-|z|}{1+|z|}\quad(z\in G).$$

（见 Nevanlinna 112 页.）

參 考 文 獻

L. V. AHLFORS: Complex analysis, sec. ed., McGraw–Hill Book Comp., New York 1966.

—: Conformal invariants: Topics in geometric function theory, McGraw–Hill Book Comp., New York 1973.

N. K. BARY: A treatise on trigonometric series, vol. II, Pergamon Press, New York 1964.

E. F. BECKENBACH and R. BELLMAN: Inequalities, Ergeb. Math. Grenzgeb. vol 30, Springer-Verlag Berlin etc. 1961.

C. CARATHÉODORY: Conformal representation, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1963.

L. CARLESON: Selected problems on exceptional sets, Van Nostrand, Princeton 1967.

E. A. CODDINGTON and N. LEVINSON: Theory of ordinary differential equations, McGraw–Hill Book Comp., New York 1955.

E. F. COLLINGWOOD and A. J. LOHWATER: The theory of cluster sets, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1966.

P. L. DUREN: Theory of H^p spaces, Academic Press, New York 1970.

W. FELLER: An introduction to probability theory and its applications, vol. II, Second ed. John Wiley & Sons, New York 1971.

J. GARNETT: Analytic capacity and measure, Lecture Notes in Mathematics no. 297, Berlin 1972.

G. M. GOLUSIN: Geometrische Funktionentheorie, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin 1957.

W. K. HAYMAN: Multivalent functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1958.

E. HILLE: Analytic function theory, vol. II, Ginn & Comp., Boston etc. 1962.

—: Lectures on ordinary differential equations, Addison–Wesley Publ. Comp., Reading Mass. 1969.

J. A. JENKINS: Univalent functions and conformal mappings, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin 1965.

N. S. LANDKOF: Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, Berlin 1972.

O. LEHTO and K. I. VIRTANEN: Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag, Berlin 1965.

J. LELONG–FERRAND: Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier–Villars, Paris 1955.

J. E. LITTLEWOOD: Lectures on the theory of functions, Oxford University Press, Oxford 1944.

M. MARDEN: Geometry of polynomials, second ed., Amer. Math. Soc., Providence 1966.

I. M. MILIN: Univalent functions and orthonormal systems (Russian), Moscow 1971.

I. P. NATANSON: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Akademie-Verlag, Berlin 1954.

R. NEVANLINNA: Eindeutige analytische Funktionen, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin 1953.

M. H. A. NEWMAN: Elements of the topology of plane sets of points, 2. ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge 1964.

M. OHTSUKA: Dirichlet problem, extremal length and prime ends, Van Nostrand Reinhold Comp., New York 1967.

G. PÓLYA and G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Springer-Verlag, Berlin 1925.

I. I. PRIVALOV: Randeigenschaften analytischer Funktionen, Deutsch. Verlag Wiss., Berlin 1956.

J. RIORDAN: Combinatorial Identities, J. Wiley & Sons, New York 1968.

A. C. SCHAEFFER and D. C. SPENCER: Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 35, New York 1950.

V. I. SMIRNOV and N. A. LEBEDEV: Functions of a complex variable – Constructive theory, M. I. T. Press, Cambridge Mass. 1968.

M. TSUJI: Potential theory in modern function theory, Maruzen Co., Tokyo 1959.

G. T. WHYBURN: Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 28, Providence 1942.

文章

D. AHARONOV

1970: On Bieberbach Eilenberg functions, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 101–104.

1971: Special topics in univalent functions, Lecture Notes, Univ. of Maryland.

1973a: On pairs of functions and related classes, Duke Math. J. 40, 669–676.

1973b: On the Bieberbach conjecture for functions with a small second coefficient, Israel J. Math. 15, 137–139.

L. V. AHLFORS

1963: Quasiconformal reflections, Acta Math. 109, 291–301.

1974: Sufficient conditions for quasiconformal extension, Proc. 1973 Conf. Univ. of Maryland, Ann. of Math. Studies 79, 23–29.

L. AHLFORS and A. BEURLING

1950: Conformal invariants and function-theoretic null-sets, Acta Math. 83, 101–129.

I. A. ALEKSANDROV

1963a: Boundary values of the functional $J = J(f, \bar{f}, f', \bar{f}')$ on the class of holomorphic functions univalent in a circle (Russian), Sibirsk. Mat. Z. 4, 17–31.

1963b: Extremal problems of the class $S(w_0)$ (Russian), Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. 169, 24–58.

I. A. ALEKSANDROV and A. S. SOROKIN

1967: An extension of Goluzin–Kufarev's variational method to multiply-connected domains, Dokl. Akad. Nauk SSSR 175, 1207–1210 = Soviet Math. Dokl. 8, 980–984.

JU. E. ALENICYN

1966: On univalent functions without common values in a multiply connected domain, Dokl. Akad. Nauk SSSR 167, 9–11 = Soviet Math. Dokl. 7, 305–307.

J. M. ANDERSON, J. CLUNIE and CH. POMMERENKE
1974: On Bloch functions and normal functions, J. Reine Angew. Math., to appear.
M. G. ARSOVE and G. JOHNSON, jr.
1970: A conformal mapping technique for infinitely connected regions, Memoirs Amer. Math. Soc. 91.
K. I. BABENKO
1970: The structure of the coefficient domain of the univalent functions of class S, Dokl. Akad. Nauk SSSR 194, 247–249 = Soviet Math. Doklady 11, 1170–1173.
A. BAERNSTEIN, jr.
1974: Integral means, univalent functions and circular symmetrization, Acta Math., 133, 139–169.
F. BAGEMIHL and W. SEIDEL
1961: Koebe arcs and Fatou points of normal functions, Comm. Math. Helv. 36, 9–18.
V. A. BARANOVA
1972: An estimate of the coefficient c_4 of univalent functions depending on $|c_2|$, (Russian), Mat. Zametki 12, 127–130.
I. E. BAZILEVIČ
1951: On distortion theorems and the coefficients of univalent functions (Russian), Mat. Sb. 28, 147–164.
1955: On a case of integrability in quadratures in the Loewner–Kufarev equation, (Russian), Mat. Sb. 37, 471–476.
1967: On a univalence criterion for regular functions and the dispersion of their coefficients, Mat. Sb. 74 (116), 133–146 = Math. USSR Sbornik 3, 123–137.
J. BECKER
1972: Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen, J. Reine Angew. Math. 255, 23–43.
1973: Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien, Math. Ann. 202, 321–335.
1976: Über die Lösungsstruktur einer Differentialgleichung in der konformen Abbildung J. Reine Angew. Math. 285, 66–74.
P. E. BEESACK
1956: Non-oscillation and disconjugacy in the complex domain, Trans. Amer. Math. Soc. 81, 211–242.
S. D. BERNARDI
1966: Bibliography of schlicht functions, Courant Institute Math. Sci., New York.
L. BERS
1972: Uniformization, moduli and Kleinian groups, Bull. London Math. Soc. 4, 257–300.
A. S. BESICOVITCH
1928: On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, Math. Ann. 98, 422–464.
1938: – II, Math. Ann. 115, 296–329.
A. BEURLING
1940: Ensembles exceptionels, Acta Math. 72, 1–13.

A. BEURLING and L. V. AHLFORS

1956: The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math. 96, 125–142.

L. BIEBERBACH

1916a: Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung, Math. Ann. 77, 153–172.

1916b: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 940–955.

A. BIELECKI and Z. LEWANDOWSKI

1962: Sur un théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessibles de M. Biernacki, Ann. Polon. Math. 12, 61–63.

M. BIERNACKI

1936: Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles, Prace Mat.-Fiz. 44, 293–314.

1956: Sur les coefficients Tayloriens des fonctions univalentes, Bull. Acad. Pol. Sci 4, 5–8.

K. G. BINMORE

1969: Analytic functions with Hadamard gaps, Bull. London Math. Soc. 1, 211–217.

D. K. BLEVINS

1973: Harmonic measure and domains bounded by quasiconformal circles, Proc. Amer. Math. Soc. 41, 559–564.

E. BOMBIERI

1967: On the local maximum property of the Koebe function, Invent. Math. 4, 26–67.

D. A. BRANNAN

1970: On univalent polynomials, Glasgow Math. J. 11, 102–107.

D. A. BRANNAN, J. CLUNIE and W. E. KIRWAN

1970: Coefficient estimates for a class of starlike functions, Canad. J. Math. 22, 476–485.

1973: The coefficient problem for functions of bounded boundary rotation, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, no. 523.

D. A. BRANNAN and W. E. KIRWAN

1969: On some classes of bounded univalent functions, J. London Math. Soc. (2) 1, 431–443.

1971: The growth of the maximum modulus of univalent functions, Duke Math. J. 38, 805–818.

M. BRELOT and G. CHOQUET

1951: Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier 3, 199–263.

L. BRICKMAN

1970: Extreme points of the set of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 372–374.

1971: Subordinate families of analytic functions, Illinois J. Math. 15, 241–248.

1973: Φ-like analytic functions I, Bull. Amer. Math. Soc. 79, 555–558.

L. BRICKMAN, T. H. MACGREGOR and D. R. WILKEN

1971: Convex hulls of some classical families of univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 156, 91–107.

C. CARATHEODORY

1907: Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Ann. 64, 95–115.

1912: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann. 72, 107–144.

1913: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. 73, 323–370.

L. CARLESON

1967: On mappings, conformal at the boundary, J. Analyse Math. 19, 1–13.

1973: On the distortion of sets on a Jordan curve under conformal mapping, Duke Math. J. 40, 547–559.

V. V. ČERNIKOV

1963: Extremal problems of univalent functions with real coefficients I, II (Russian), Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. 169, 69–95.

Z. CHARZYŃSKI

1953: Sur les fonctions univalentes bornées, Rozprawy Mat. 2, 1–57.

1955: Sur les fonctions univalentes algébriques bornées, Rozprawy Mat. 10, 1–41.

Z. CHARZYŃSKI and M. SCHIFFER

1960a: A geometric proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Scripta Math. 25, 173–181.

1960b: A new proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, Arch. Rational Mech. Anal. 5, 187–193.

G. CHOQUET

1953/54: Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier Grenoble 5, 131–295.

J. CLUNIE

1959a: On meromorphic schlicht functions, J. London Math. Soc. 34, 215–216.

1959b: On schlicht functions, Ann. of Math. 69, 511–519.

J. CLUNIE and F. R. KEOGH

1960: On starlike and convex functions, J. London Math. Soc. 35, 229–233.

J. CLUNIE and CH. POMMERENKE

1966: On the coefficients of close-to-convex univalent functions, J. London Math. Soc. 41, 161–165.

1967: On the coefficients of univalent functions, Michigan Math. J. 14, 71–78.

J. H. CURTISS

1971: Faber polynomials and Faber series, Amer. Math. Monthly 78, 577–596.

N. G. DEBRUIJN

1941: Ein Satz über schlichte Funktionen, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 44, 47–49.

D. W. DETEMPLE

1970: On coefficient inequalities for bounded univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn Ser. AI no. 469.

1971: Generalizations of the Grunsky–Nehari inequalities, Arch. Rational Mech. Anal. 44, 93–120.

J. DIEUDONNÉ

1931a: Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complèxe, Ann. Ecole Norm. Sup. (3) 48, 247–358.

1931b: Sur les fonctions univalentes, C. R. Acad. Sci. Paris 192, 1148–1150.

J. DUFRESNOY
1945: Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle unité, Bull. Sci. Math. 69, 21–31, 117–121.
P. L. DUREN
1971: Coefficients of meromorphic schlicht functions, Proc. Amer. Math. Soc. 28, 169–172.
P. L. DUREN and M. SCHIFFER
1962/63: The theory of the second variation in extremal problems for univalent functions, J. Analyse Math. 10, 193–252.
P. L. DUREN, H. S. SHAPIRO and A. L. SHIELDS
1966: Singular measures and domains not of Smirnov type, Duke Math. J. 33, 247–254.
G. EHRIG
1974a: The Bieberbach conjecture for univalent functions with restricted second coefficients, J. London Math. Soc. 8, 355–360.
1974b: Coefficient estimates concerning the Bieberbach conjecture, Math. Z. 140, 111–126.
B. G. EKE
1967: On the angular derivative of regular functions, Math. Scand. 21, 122–127.
P. ERDÖS and J. GILLIS
1937: Note on the transfinite diameter, J. London Math. Soc. 12, 185–192.
M. FEKETE
1923a: Analoga zu den Sätzen von Rolle und Bolzano für komplexe Polynome und Potenzreihen mit Lücken, Jber. Deutsch. Math.-Verein 32, 299–306.
1923b: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, Math. Z. 17, 228–249.
1930: Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen I, II, Math. Z. 32, 108–114, 215–221.
M. FEKETE and G. SZEGÖ
1933: Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen, J. London Math. Soc. 8, 85–89.
J. FERRAND
1942: Etude de la correspondence entre les frontières dans la représentation conforme, Bull. Soc. Math. France 70, 143–174.
C. H. FITZGERALD
1972: Quadratic inequalities and coefficient estimates for schlicht functions, Arch. Rational Mech. Anal. 46, 356–368.
S. FRIEDLAND
1970: On a conjecture of Robertson, Arch. Rational Mech. Anal. 37, 255–261.
S. FRIEDLAND and Z. NEHARI
1970: Univalence conditions and Sturm-Liouville eigenvalues, Proc. Amer. Math. Soc. 24, 595–603.
W. H. J. FUCHS
1967: On the zeros of a power series with Hadamard gaps, Nagoya Math. J. 29, 167–174.
D. GAIER
1956: Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete, Math. Z. 64, 385–424.
1962: On conformal mapping of nearly circular regions, Pacific J. Math. 12, 149–162.

P. R. GARABEDIAN, G. G. ROSS and M. SCHIFFER
1965: On the Bieberbach conjecture for even n, J. Math. Mech. 14, 975–990.
P. R. GARABEDIAN and M. SCHIFFER
1955a: A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Rational Mech. Anal. 4, 428–465.
1955b: A coefficient inequality for schlicht functions, Ann. of Math. (2) 61, 116–136.
1967: The local maximum theorem for the coefficients of univalent functions, Arch. Rational Mech. Anal. 26, 1–32.
C. GATTEGNO and A. OSTROWSKI
1949a: Représentation conforme à la frontière; domaines généraux, Mém. Sci. Math. 109.
1949b: Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers, Mém. Sci. Math. 110.
F. W. GEHRING and W. K. HAYMAN
1962: An inequality in the theory of conformal mapping, J. Math. Pures Appl. (9) 41, 353–361.
G. M. GOLUSIN [GOLUZIN]
1935: On the majorization principle in function theory (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 42, 647–650.
1938: Some estimates of the coefficients of schlicht functions (Russian), Mat. Sb 3, 321–330.
1943: On the theory of univalent functions (Russian), Mat. Sb. 12, 48–55.
1946a: On distortion theorems and the coefficients of univalent functions (Russian), Mat. Sb. 19, 183–202.
1946b: A variational method in conformal mapping I (Russian), Mat. Sb. 19, 203–236.
1947: On a variational method in conformal mapping II (Russian), Mat. Sb. 21, 83–117.
1948: On distortion theorems and coefficients of univalent functions (Russian), Mat. Sb. 23, 353–360.
1951: On the theory of univalent functions (Russian), Mat. Sb. 29, 197–208.
A. W. GOODMAN
1958: On variation formulas for univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 89, 285–294.
1968a: Open problems on univalent and multivalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 74, 1035–1050.
1968b: The valence of sums and products, Canad. J. Math. 20, 1173–1177.
G. S. GOODMAN
1967: On the determination of univalent functions with prescribed coefficients, Arch. Rational Mech. Anal. 24, 78–81.
1968: Univalent functions and optimal control, Thesis Stanford University.
1969: A method for comparing univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 517–521.
E. GRASSMANN
1973: The existence of quadratic differentials in simply connected regions of the complex plane, Canad. J. Math. 25, 83–91.
T. H. GRONWALL
1914/15: Some remarks on conformal representation, Ann. of Math. 16, 72–76.

H. GRÖTZSCH

1930: Über ein Variationsproblem der konformen Abbildung, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Natur. Kl. 82, 251–263.

1931: *Über die Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche I*, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Naturw. Kl. 83, 254–279.

1932: – II, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Naturw. Kl. 84, 269–278.

1933: Über zwei Verschiebungsprobleme der konformen Abbildung, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl., 87–100.

1935/36: Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung, Comment. Math. Helv. 8, 382–390.

H. GRUNSKY

1932: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche, Schr. Math. Seminar Univ. Berlin 1, 93–140.

1939: Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen, Math. Z. 45, 29–61.

1971: Zur konformen Abbildung von Gebieten, die in einer Richtung konvex sind, J. Math. Anal. Appl. 34, 685–701.

R. L. HALL

1968: On the asymptotic behaviour of functions holomorphic in the unit disc, Math. Z. 107, 357–362.

G. H. HARDY

1915: The mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London Math. Soc. (2) 14, 269–277.

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD

1926: *A further note on the converse of Abel's theorem*, Proc. London Math. Soc. 25, 219–236.

W. K. HAYMAN

1951: Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions, J. Analyse Math. 1, 155–179.

1955a: The asymptotic behaviour of p-valent functions, Proc. London Math. Soc. (3) 5, 257–284.

1955b: *Uniformly normal families, Lectures on functions of a complex variable*, Univ. of Michigan, 199–212.

1958: Bounds for the large coefficients of univalent functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI no. 250.

1963: On successive coefficients of univalent functions, J. London Math. Soc. 38, 228–243.

1965: Coefficient problems for univalent functions and related classes, J. London Math. Soc. 40, 385–406.

1967: Research problems in function theory, University of London.

1968: On the second Hankel determinant of mean univalent functions, Proc. London Math. Soc. (3) 18, 77–94.

1970: Tauberian theorems for multivalent functions, Acta Math. 125, 269–298.

1973: Differential inequalities and local valency, Pacific J. Math. 44, 117–137.

W. K. HAYMAN and P. B. KENNEDY

1958: *On the growth of multivalent functions*, J. London Math. Soc. 33, 333–341.

G. HERGLOTZ

1911: Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, 501–511.

H. HEROLD

1974: Nichteuklidischer Nullstellenabstand der Lösungen von $w'' + p(z) w' = 0$, Preprint.

F. HOLLAND

1972: On the coefficients of starlike functions, Proc. Amer. Math. Soc. 33, 463–470.

J. A. HUMMEL

1958: A variational method for starlike functions, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 82–87.

1964: The Grunsky coefficients of a schlicht function, Proc. Amer. Math. Soc. 15, 142–150.

1967: Multivalent starlike functions, J. Analyse Math. 18, 133–160.

1972a: Lectures on variational methods in the theory of univalent functions, Lectures Notes, Univ. of Maryland.

1972b: The Marx conjecture for starlike functions, Michigan Math. J. 19, 257–266.

1972c: Inequalities of Grunsky type for Aharonov pairs, J. Analyse Math. 25, 217–257.

J. A. HUMMEL and M. SCHIFFER

1969: Coefficient inequalities for Bieberbach–Eilenberg functions, Arch. Rational Mech. Anal. 32, 87–99.

L. P. IL'INA

1968: The relative growth of nearby coefficients of schlicht functions (Russian), Mat. Zametki 4, 715–722.

A. E. INGHAM

1936: Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, Math. Z. 41, 367–379.

S. JAENISCH

1968: Length distortion of curves under conformal mappings, Michigan Math. J. 15, 121–128.

J. A. JENKINS

1953: On values omitted by univalent functions, Amer. J. Math. 75, 406–408.

1954: A general coefficient theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 77, 262–280.

1956: Some theorems on boundary distortion, Trans. Amer. Math. Soc. 81, 477–500.

1960a: On certain coefficients of univalent functions, Analytic Functions, Princeton Univ. Press, 158–194.

1960b: On certain coefficients of univalent functions II, Trans. Amer. Math. Soc. 96, 534–545.

1960c: An extension of the general coefficient theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 95, 387–407.

1961: On the schlicht Bloch constant, J. Math. Mech. 10, 729–734.

1964: Some area theorems and a special coefficient theorem, Illinois J. Math. 8, 80–99.

1965: On Bieberbach–Eilenberg functions III, Trans. Amer. Math. So. 119, 195–215.

1969: On certain geometrical problems associated with capacity, Math. Nachr. 39, 349–356.

J. A. JENKINS and K. OIKAWA
1970: *On the growth of slowly increasing unbounded harmonic functions*, Acta Math. 124, 37–63.
J. A. JENKINS and D. C. SPENCER
1951: Hyperelliptic trajectories, Ann. of Math. 53, 4–35.
G. JENSEN
1969: Über die Diskriminanten kompakter ebener Mengen, Thesis Techn. Univ. Berlin.
W. KAPLAN
1952: Close-to-convex schlicht functions, Michigan Math. J. 1, 169–185.
V. K. KOČETKOV
1971: The repeated differentiation of one parameter families of univalent functions (Russian), Sibirsk. Mat. Ž. 12, 367–373 = Siberian Math. J. 12, 261–265.
P. KOEBE
1907: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., 191–210.
Y. KOMATU
1942: Über eine Verschärfung des Löwnerschen Hilfsatzes, Proc. Imperial Acad. Japan 18, 354–359.
T. KÖVARI
1972: On the order of polynomial approximation for closed Jordan domains, J. Approximation Theory 5, 362–373.
T. KÖVARI and CH. POMMERENKE
1967: On Faber polynomials and Faber expansions, Math. Z. 99, 193–206.
J. KRZYŻ
1962: The radius of close-to-convexity within the family of univalent functions, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. Astronom. Phys. 10, 201–204.
1963: On the derivative of close-to-convex functions, Colloq. Math. 10, 139–142.
P. P. KUFAREV
1943: On one-parameter families of analytic functions (Russian), Mat. Sb. 13, 87–118.
1956: On a certain method of investigation of extremum problems in the theory of univalent functions (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 107, 633–635.
1963: On G. M. Goluzin's variational formula (Russian), Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. 163, 58–62.
R. KÜHNAU
1968: Über die schlichte konforme Abbildung auf nicht überlappende Gebiete, Math. Nachr. 36, 61–71.
1969: Herleitung einiger Verzerrungseigenschaften konformer und allgemeinerer Abbildungen mit Hilfe des Argumentprinzips, Math. Nachr. 39, 249–275.
1971a: Über vier Klassen schlichter Funktionen, Math. Nachr. 50, 17–26.
1971b: Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen, Math. Nachr. 48, 77–105.
G. V. KUZMINA
1965: Covering theorems for functions holomorphic and univalent within a disk, Dokl. Akad. Nauk SSSR 160, 25–28 = Soviet Math. Doklady 6, 21–25.

1968: Estimates of the transfinite diameter of a certain family of continua and covering theorems for univalent functions (Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov 94, 47–65 = Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc.

E. LANDAU

1929: Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten, Math. Z. 30, 608–634.

M. A. LAVRENT'EV

1934: On the theory of conformal mappings (Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov. 5, 159–246.

N. A. LEBEDEV

1951: Some estimates and extremal problems in the theory of conformal mapping (Russian), Thesis Leningrad.

1961: Applications of the area principle to problems on non-overlapping regions (Russian), Trudy Mat. Inst. Steklov 60, 211–231.

N. A. LEBEDEV and I. M. MILIN

1951: On the coefficients of certain classes of analytic functions (Russian), Mat. Sb. 28, 359–400.

O. LEHTO

1971: Schlicht functions with a quasiconformal extension, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 500.

1973: Conformal mappings and Teichmüller spaces, Lecture Notes, Israel Inst. Techn. Haifa.

O. LEHTO and K. I. VIRTANEN

1957: Boundary behaviour and normal meromorphic functions, Acta Math. 97, 47–65.

F. LEJA

1934: Sur les suites des polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green, Ann. Soc. Polon. Math. 12, 57–71.

V. I. LEVIN

1935: Some remarks on the coefficients of schlicht functions, Proc. London Math. Soc. 32, 467–480.

Z. LEWANDOWSKI

1958: Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska 12, 131–146.

1960: – II, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska 14, 19–46.

1970: On some problems of M. Biernacki concerning subordinate functions and on some related topics, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska Sect. A 19, (1965), 33–46.

E. LINDELÖF

1915: Sur un principe général de l'analyse et ses applications à la représentation conforme, Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Ser. A 46 (1920), no. 4.

1916: Sur la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle, 4. Congr. Skand. Math., 59–90.

J. E. LITTLEWOOD

1925: On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. (2) 23, 481–519.

1938: On the coefficients of schlicht functions, Quart. J. Math. Oxford Ser. 9, 14–20

J. E. LITTLEWOOD and R. E. A. C. PALEY

1932: A proof that an odd schlicht function has bounded coefficients, J. London Math. Soc. 7, 167–169.

A. J. LOHWATER

1971: The boundary behaviour of derivatives of univalent functions, Math. Z. 119, 115–120.

D. LONDON

1962: On the zeros of the solutions of $w''(z) + p(z)\, w(z) = 0$, Pacific J. Math. 12, 979–991.

K. LÖWNER

1917: Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|z| < 1$, die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden, S.-B. Sächs. Akad. Wiss. 69, 89–106.

1919: Über Extremumsätze bei der konformen Abbildung des Äußeren des Einheitskreises, Math. Z. 3, 65–77.

1923: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises, Math. Ann. 89, 103–121.

R. R. LONDON and D. K. THOMAS

1970: An area theorem for starlike functions, Proc. London Math. Soc. 20, 734–748.

K. W. LUCAS

1968: A two-point modulus bound for areally mean p-valent functions, J. London Math. Soc. 43, 487–494.

1969: On successive coefficients of areally mean p-valent functions, J. London Math. Soc. 44, 631–642.

T. H. MACGREGOR

1967: Majorization by univalent functions, Duke Math. J. 34, 95–102.

1972: Applications of extreme – point theory to univalent functions, Michigan Math. J. 19, 361–376.

A. I. MARKUŠEVIČ

1936: On the conformal representation of domains with variable boundaries, Mat. Sb. 43, 863–886.

F. MARTY

1934: Sur le module des coefficients de MacLaurin d'une fonction univalente, C. R. Acad. Sci. Paris 198, 1569–1571.

A. MARX

1932/33: Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann. 107, 40–67.

K. MATSUMOTO

1964: On some boundary problems in the theory of conformal mappings of Jordan domains, Nagoya Math. J. 24, 129–142.

S. MAZURKIEWICZ

1936: Über die Definition der Primenden, Fund. Math. 26, 272–279.

J. E. MCMILLAN

1966: Principal cluster values of continuous functions, Math. Z. 91, 186–197.

1969: Boundary behaviour of a conformal mapping, Acta Math. 123, 43–67.

1970: Boundary behaviour under conformal mapping, Proc. NRL Conference Classical Function Theory, Washington, 59–76.

J. E. MCMILLAN and G. PIRANIAN
1973: Compression and expansion of boundary sets, Duke Math. J. 40, 599–605.
J. E. MCMILLAN and CH. POMMERENKE
1970: On the boundary behaviour of analytic functions without Koebe arcs, Math. Ann. 189, 275–279.
I. M. MILIN
1964: The area method in the theory of univalent functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154, 264–267 = Soviet Math. Doklady 5, 78–81.
1965: Estimation of coefficients of univalent functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 160, 769–771 = Soviet Math. Doklady 6, 196–198.
1967: On the coefficients of univalent functions, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 176 = Soviet Math. Doklady 8, 1255–1258.
1968: Adjacent coefficients of univalent functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 180 = Soviet Math. Doklady 9, 762–765.
1970: Hayman's regularity theorem for the coefficients of univalent functions, Soviet Math. Dokl. 11, 724–728 = Dokl. Akad. Nauk SSSR 192, 738–741.
O. MONTALDO
1966: Sul comportamento delle funzioni univalenti nell'intorno della funzione di Koebe, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 21, 127–143.
P. J. MYRBERG
1933: Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche, Acta Math. 61, 39–79.
Z. NEHARI
1949: The Schwarzian derivative and schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc. 55, 545–551.
1953: Some inequalities in the theory of functions, Trans. Amer. Math. Soc. 75, 256–286.
1954: Some criteria of univalence, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 700–704.
1967: Some function-theoretic aspects of linear second-order differential equations, J. Analyse Math. 18, 259–276.
1969: Inequalities for the coefficients of univalent functions, Arch. Rational Mech. Anal. 34, 301–330.
1970: On the coefficients of Bieberbach–Eilenberg functions, J. Analyse Math. 23, 297–303.
E. NETANYAHU
1970: On univalent functions in the unit disk whose image contains a given disk, J. Analyse Math. 23, 305–322.
K. NOSHIRO
1938: On the theory of cluster sets of analytic functions, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 7, 149–159.
A. E. OBROCK
1966: An inequality for certain schlicht functions, Proc. Amer. Math. Soc. 17, 1250–1253.
1971: Teichmüller inequalities without coefficient normalization, Trans. Amer. Math. Soc. 159, 392–416.
A. OSTROWSKI
1936: Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung, Prace Mat. Fiz. 44, 371–471.

M. OZAWA

1969a: On the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Kōdai Math. Sem. Rep. 21, 97–128.

1969b: An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Kōdai Math. Sem. Rep. 21, 129–132.

M. OZAWA and Y. KUBOTA

1970: On the eighth coefficient of univalent functions, J. Analyse Math. 23, 323–352.

R. N. PEDERSON

1968a: A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient, Arch. Rational Mech. Anal. 31, 331–351.

1968b: On unitary properties of Grunsky's matrix, Arch. Rational Mech. Anal. 29, 370–377.

1969: A note on the local coefficient problem, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 345–347.

R. N. PEDERSON and M. SCHIFFER

1972: A proof of the Bieberbach conjecture for the fifth coefficient, Arch. Rational Mech. Anal. 45, 161–193.

E. PESCHL

1937: Zur Theorie der schlichten Funktionen, J. Reine Angew. Math. 176, 61–94.

A. PFLUGER

1967: Lectures on conformal mappings, Lecture Notes Indiana Univ. Bloomington.

1971a: Lineare Extremalprobleme bei schlichten Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 489.

1971b: Quadratische Differentiale und Extremalgebiete: hinreichende Bedingungen, Lecture Notes Oberwolfach, ETH Zürich.

G. PICK

1917: Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet, S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien, Math.-Naturwiss. Kl. Abt. IIa 126, 247–263.

G. PIRANIAN

1960: The distribution of prime ends, Michigan Math. J. 7, 83–95.

A. I. PLESSNER

1927: Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs, J. Reine Angew. Math. 158, 219–227.

V. V. POKORNYI

1951: On some sufficient conditions for univalence (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 79, 743–746.

R. J. POLANSKY

1970: On the conformal mapping of variable domains, Pacific J. Math. 34, 145–155.

G. PÓLYA

1928: Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete I, II, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 228–232, 280–282.

1929: – III, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 55–62.

G. PÓLYA and M. SCHIFFER

1959: Sur la représentation conforme de l'extérieur d'une courbe fermée convexe, C. R. Acad. Sci. Paris 248, 2837–2839.

G. PÓLYA and I. J. SCHOENBERG

1958: Remarks on the de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle, Pacific J. Math. 8, 295–334.

CH. POMMERENKE

1959a: On the derivative of a polynomial, Michigan Math. J. 6, 373–375.

1959b: Über die Kapazität ebener Kontinuen, Math. Ann. 139, 64–75.

1962a: On starlike and convex functions, J. London Math. Soc. 37, 209–224.

1962b: Über die Mittelwerte und Koeffizienten multivalenter Funktionen, Math. Ann. 145, 285–296.

1962c: Über einige Klassen meromorpher schlichter Funktionen, Math. Z. 78, 263–284.

1963a: On meromorphic starlike functions, Pacific J. Math. 13, 221–235.

1963b: On starlike and close-to-convex functions, Proc. London Math. Soc. 13, 290–304.

1964a: Über die Faberschen Polynome schlichter Funktionen, Math. Z. 85, 197–208.

1964b: Lacunary power series and univalent functions, Michigan Math. J. 11, 219–223.

1965a: On close-to-convex analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 114, 176–186.

1965b: Über die Subordination analytischer Funktionen, J. Reine Angew. Math. 218, 159–173.

1966: On the coefficients and Hankel determinants of univalent functions, J. London Math. Soc. 41, 111–122.

1967a: Relations between the coefficients of a univalent function, Invent. Math. 3, 1–15.

1967b: On the Hankel determinants of univalent functions, Mathematika (London) 14, 108–112.

1968a: On the growth of univalent functions, Michigan Math. J. 15, 485–494.

1968b: On the logarithmic capacity and conformal mapping, Duke Math. J. 35, 321–325.

1969a: On the Grunsky inequalities for univalent functions, Arch. Rational Mech. Anal. 35, 234–244.

1969b: Hankel determinants and meromorphic functions, Mathematika (London) 16, 158–166.

1970: On Bloch functions, J. London Math. Soc. (2) 2, 689–695.

V. I. POPOV

1965: The range of a system of functionals on the class S (Russian), Trudy Tomsk. Gos. Univ. Ser. Meh.-Mat. 182, 106–132.

H. PRAWITZ

1927: Über die Mittelwerte analytischer Funktionen, Ark. Mat. Astr. Fys. 20 A, 1–12.

I. I. PRIVALOV

1919: The Cauchy integral (Russian), Bull. University Saratov.

1924: Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques, J. École Polytech. 24, 77–112.

T. RADÓ

1923: Sur la représentation conforme de domaines variables, Acta Sci. Math. (Szeged) 1, 180–186.

M. O. READE

1955: On close-to-convex univalent functions, Michigan Math. J. 3, 59–62.

M. I. RED'KOV

1960: The domain of values of the functional $I = \ln[w^{\lambda} \varphi'(w)^{1-\lambda} \varphi'(0)^{\nu} \varphi(w)^{-\lambda} |\varphi(w)|^{-\varepsilon}]$ in certain classes of bounded univalent functions (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 133, 284–287 = Soviet Math. Dokl. 1, 848–851.

E. REICH and M. SCHIFFER

1964: Estimates for the transfinite diameter of a continuum, Math. Z. 85, 91–106.

E. REICH and K. STREBEL

1974: Extremal quasiconformal mappings with given boundary values, Contributions to analysis: A collection of papers dedicated to Lipman Bers, New York, 375–391.

E. RENGEL

1933: Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung, Schr. Math. Sem. Univ. Berlin 1, 139–162.

M. S. ROBERTSON

1936a: A remark on the odd schlicht functions, Bull. Amer. Math. Soc. 42, 366–370.

1936b: On the theory of univalent functions, Ann. of Math. 37, 374–408.

1961: Applications of the subordination principle to univalent functions, Pacific J. Math. 11, 315–324.

1965: The generalized Bieberbach conjecture for subordinate functions, Michigan Math. J. 12, 421–429.

1966: A generalization of the Bieberbach coefficient problem for univalent functions, Michigan Math. J. 13, 185–192.

1970a: Quasi-subordination and coefficient conjectures, Bull. Amer. Math. Soc. 76, 1–9.

1970b: Quasi-subordinate functions, Mathematical Essays dedicated to A. J. Macintyre, Ohio Univ. Press, 311–330.

R. M. ROBINSON

1947: Univalent majorants, Trans. Amer. Math. Soc. 61, 1–35.

1969: On the transfinite diameters of some related sets, Math. Z. 108, 377–380.

W. W. ROGOSINSKI

1932: Über positive harmonische Entwicklungen und typisch reelle Potenzreihen, Math. Z. 35, 93–121.

1943: On the coefficients of subordinate functions, Proc. London Math. Soc. 48, 48–82.

W. C. ROYSTER

1965: On the univalence of a certain integral, Michigan Math. J. 12, 385–387.

S. RUSCHEWEYH and T. SHEIL-SMALL

1974: Hadamard products of schlicht functions and the Pólya–Schoenberg conjecture, Comment. Math. Helv. 48, 119–135.

A. C. SCHAEFFER and D. C. SPENCER

1943: The coefficients of schlicht functions, Duke Math. J. 10, 611–635.

M. SCHIFFER

1936: Sur un principe nouveau pour l'évaluation de fonctions holomorphes, Bull. Soc. Math. France 64, 231–240.

1938a: Sur un problème d'extremum de la représentation conforme, Bull. Soc. Math. France 66, 48–55.

1938b: A method of variation within the family of simple functions, Proc. London Math. Soc. 44, 432–449.
1938c: On the coefficients of simple functions, Proc. London Math. Soc. 44, 450–452.
1941: On the subadditivity of the transfinite diameter, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37, 373–383.
1943: Variation of the Green function and theory of the p-valued functions, Amer. J. Math. 65, 341–360.
1946: Hadamard's formula and variation of domain functions, Amer. J. Math. 68, 417–448.
1948: Faber polynomials in the theory of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. 54, 503–517.
1963: Fredholm eigenvalues and conformal mapping, Rend. Mat. 22, 447–468.
1967: Univalent functions whose n first coefficients are real, J. Analyse Math. 18, 329–349.
1968: On the coefficient problem for univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 134, 95–101.

M. SCHIFFER and H. G. SCHMIDT
1971: A new set of coefficient inequalities for univalent functions, Arch. Rational Mech. Anal. 42, 346–368.

M. SCHIFFER and O. TAMMI
1965: On the fourth coefficient of bounded univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 119, 67–78.
1968: On bounded univalent functions which are close to identity, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 435.
1969: On the coefficient problem for bounded univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 140, 461–474.

I. SCHUR
1911: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, J. Reine Angew. Math. 140, 1–28.
1945a: On Faber polynomials, Amer. J. Math. 67, 33–41.
1945b: Ein Satz über quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten, Amer. J. Math. 67, 472–480.

T. SHEIL-SMALL
1969: On convex univalent functions, J. London Math. Soc. (2) 1, 483–492.
1970: Starlike univalent functions, Proc. London Math. Soc. (3) 21, 577–613.
1973: On the convolution of analytic functions, J. Reine Angew. Math. 258, 137–152.

L. SIEWIERSKI
1960: The local solution of the coefficient problem for bounded schlicht functions, Lodzkie Towarzystwo Naukowe Sect. III, no 68.

V. SINGH
1962: Grunsky inequalities and coefficients of bounded schlicht functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 310.

W. I. SMIRNOV
1932: Über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, Math. Ann. 107, 313–323.

L. ŠPAČEK

1933: Contribution à la théorie des fonctions univalentes, Časopis Pěst. Mat.-Fys. 62, 12–19.

D. C. SPENCER

1940: On finitely mean valent functions II, Trans. Amer. Math. Soc. 48, 418–435.

1941: On finitely mean valent functions, Proc. London Math. Soc. 47, 201–211.

G. SPRINGER

1951: *The coefficient problem for schlicht mappings of the exterior of the unit circle*, Trans. Amer. Math. Soc. 70, 421–450.

1955: Extreme Punkte der konvexen Hülle schlichter Funktionen, Math. Ann. 129, 230–232.

1964: Fredholm eigenvalues and quasiconformal mapping, Acta Math. 111, 121–142.

E. STROHHÄCKER

1933: Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen, Math. Z. 37, 356–380.

E. STUDY

1913: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 2. Heft, Leipzig und Berlin.

P. K. SUETIN

1964: The basic properties of Faber polynomials (Russian), Uspehi Mat. Nauk. 19, no. 4, 125–154 = Russian Math. Surveys 19, no. 4, 121–149.

T. J. SUFFRIDGE

1970: Some remarks on convex maps of the unit disk, Duke Math. J. 37, 775–777.

G. D. SUVOROV

1953: Prime ends of a sequence of plane regions converging to a nucleus (Russian), *Mat. Sb. 33, 73–100 = Amer. Math. Soc. Translations Ser. 2. vol. 1*, 67–93.

G. SZEGÖ

1924: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete „Über die Verteilung der Wurzeln ...", Math. Z. 21, 203–208.

O. TAMMI

1953: On the maximalization of the coefficient a_3 of bounded schlicht functions, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 149.

O. TEICHMÜLLER

1938: Ungleichungen zwischen den Koeffizienten schlichter Funktionen, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 363–375.

1939: Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math. naturw. Kl., no 22, 1–197.

D. K. THOMAS

1967: On starlike and close-to-convex functions, J. London Math. Soc. 42, 427–435.

1968: On Bazilevič functions, Trans. Amer. Math. Soc. 132, 353–361.

O. TOEPLITZ

1949: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionstheorie, Comment. Math. Helv. 23, 222–242.

J. B. TWOMEY

1970: On the derivative of a starlike function, J. London Math. Soc. (2), 2, 99–110.

1971: On meromorphic starlike functions, J. London Math. Soc. (2) 4, 231–239.

S. E. WARSCHAWSKI

1932: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Z. 35, 321–456.

1930: On the degree of variation in conformal mapping of variable regions, Trans. Amer. Math. Soc. 69, 335–356.

1952: On conformal mapping of variable regions, Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Ser. 18, 175–187.

1956: On the distortion in conformal mapping of variable domains, Trans. Amer. Math. Soc. 82, 300–322.

1961: On the differentiability at the boundary in conformal mapping, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 614–620.

1968: On boundary derivatives in conformal mapping, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 420.

1968/69: On Hölder continuity at the boundary in conformal maps, J. Math. Mech. 18, 423–427.

1971: Remarks on the angular derivative, Nagoya Math. J. 41, 19–32.

M. WEISS and G. WEISS

1963: On the Picard property of lacunary power series, Studia Math. 22, 221–245.

J. ZAMORSKI

1962: On Bazilevič schlicht functions, Ann. Polon. Math. 12, 83–90.

符　号　表

记　号	含　义	限用于(章)	引入的页
$\mathscr{A}$	全体解析函数	7	194
$A_Q(B)$	Q-面积	8	227
area	二维测度	—	2
b_{kl}	格隆斯基系数	—	55
C	欧拉常数	3	80
$\hat{\mathbb{C}}$	黎曼球面	—	1
c_{kl}	格拉贝定-谢菲尔系数	4	108
C_z	z 到 $f(z)$ 的同伦路径	8	245
cap	(对数)容量	11	353
cap_*, cap^*	内容量，外容量	11	360
D	单位圆盘	—	2
$d(w)$	到边界的距离	10	334
$d_Q(z_1, z_2)$	Q-距离	8	228
E, $E(g)$	$g(\Delta)$ 的余集	1,3,4	4
Ext C	$G\backslash C$ 的无界分集	9	289
$f(A)$	特指：径向极限的集	11	367
$f(z, t)$	娄威纳链	6	168
$f_Q(z)$	—	8	251
$f^{\#}(z)$	球面导数	9	278
$\{f(z), z\}$	薛瓦尔兹导数	3,6	66
H^p	哈代类	10	340
$I(P)$	素端的迹	9	294
$I_1(r)$	积分均值	5,10	133
Int C	$G\backslash C$ 的有界分集	9	289
$l(C)$	(欧氏)长度	10	336
$l(r)$	$f(\{\lvert z\rvert = r\})$ 的长度	5	138
$l_Q(C)$	Q-长度	8	227
M_a, M'_a	—	11	352
$M(r)$	最大模	—	133
$M_T(r)$	对于 $\theta \in T$ 的最大模	5	133
meas	一维测度	—	332
$\mathscr{P}$	正实部函数类	2,6	35

续表

记号	含义	限用于(章)	引入的页
$Q(z)\,dz^2$	二次微分	—	226
$q_n(z)$	斐开赫多项式	11	352
S	D中的标准化单叶函数类	—	3
$U(z_0)$, U	极点的邻域，它们的并	8	247
Δ	单位圆周的外部	—	2
$\Delta(r)$	—	8	251
$\Delta_n(E)$	紧集E的判别式	11	352
$\bar{\Lambda}$	—	7	198
$\Lambda[f;\ g]$	泛函的复导数	7	199
$\Lambda^*[g;\ h]$	—	7	214
$\Lambda(E)$	线性测度	10	341
Π	临界点的集	8	227
Π_0	有限临界点的集	8	227
Π_1	所有极点的集	8	227
Π_2	阶数≥2的极点的集	8	227
$\Pi(P)$	主点的集	9	294
$\rho(f,\ Q,\ z_0)$	—	8	260
Σ	Δ中的标准化单叶函数类	—	4
Σ_0	Σ中 $b_0=0$ 的子类	—	5
$\Sigma(K)$	格鲁斯基范数 $\le K$ 的子类	9,11	305
$\Phi[f]$	泛函	7	194
$\Phi_n(w)$	法贝尔多项式	—	54
$\varphi(z,\ r,\ t)$	—	6	168
$\Psi(w)$	—	4	108
$\Psi_n(w)$	法贝尔型多项式	4	113
$\chi(C,\ z)$	环绕次数	—	5
$\omega(z_0,\ A)$	调和测度	10	334
∂D, $\partial\Delta$	单位圆周	—	2
$\prec$	从属关系	—	50
$\ll$	系数的优越关系	5	141

名词索引

一　画

一致局部连通　301
一般系数定理　262, 269

二　画

二次变分　204
二次微分　121, 226
二次微分的常点　226
　～零点　226
　～极点　226, 239
　～临界点　227
　～有限临界点　227
　～轨线　230
　～正交轨线　231
　～临界轨线　231, 239
　～轨线弧　230
　～法式　228
　～端域　238, 253
　～带域　238, 253
　～圆域　238, 252
　～环域　238, 252
　～稠密域　239, 243, 254
　～整体结构定理　239

三　画

三极定理　243
广义比伯巴赫猜想　21
马提正规定则　279
马提变分　234
万有覆盖曲面　248

四　画

不可数稠密　330
不相交函数　94, 274, 276
不取指定值的函数　107, 124, 126, 218
内区域　27
内变分　205
内容量　360
内映照半径　3
比伯巴赫猜想　17
比伯巴赫-艾伦伯格函数　105, 110
从属性　30, 167, 328, 374
从属原理　31
戈鲁辛不等式　62, 103, 305
戈鲁辛变分方法　166
巴西列维奇函数　189
贝尔林定理　365

五　画

正实部函数　35
正交轨线　231
正规函数　278
正规函数的最大模原理　280
可达素端　255
可定容集　361
可变域　303
长度的偏差　337, 365, 375
凸函数　40, 42
凸半径　46, 221
凸泛函　194
卡氏边界　289
卡氏核定理　23
卡列曼原理　374
外区域　27
外容量　360
对称函数　17, 184
对数测度　364
主点　294
布洛赫函数　286, 288, 326
叶尼采夫斯基定理　25

六　画

共形　2, 323, 349
共形中心　5
在虚轴方向凸　57
有长可达　339
有限度泛函　198

有界单叶函数 17, 101, 141, 147, 184, 221, 372
有限临界点 227
轨线 230
轨线弧 230
光滑曲线 314
同胚扩张 299, 306
多叶函数 139
多连通区域 276
交比 304
米林-列别杰夫引理 78

七 画

麦比乌斯变换 1
李普希兹条件 319
亨克尔行列式 157
克莱因-米尔曼定理 195
极点 226, 239
极端点 195, 197
极值区域 207
极值函数 11, 194
极值度量 227
拟共形曲线 304, 311, 313, 325
拟共形扩张 308, 311, 370
拟从属 31
连续统 4
角微商 325, 342, 347
角极限 285, 345, 365
近于凸 47
系数域 19
系数增长 75, 138
系数的渐近性质 76, 150
系数线性组合的估计 156
间断条件 159, 161, 162
判别式 352, 376
泛函导数 198, 213
局部一致收敛拓扑 21, 194
局部连通 296
阿达玛卷积 45
阿达玛间断 162

八 画

环域 238, 252
环绕次数 5
线性可达 48
线性测度 341, 350
线性泛函 209
法都点 345
法都定理 340
法贝尔多项式 54, 86, 145
法勃利间断 165
法式 228
迪尼光滑曲线 317, 329
迪尼连续曲率 320
迪里克莱问题 304
迪里克莱原理 308
径向极限 284, 364
径向聚值集 294
到恒等映照的容许同伦 245
罗勃松猜想 20, 69
绍恩弗莱斯定理 300
若当曲线定理 27
非欧线段 334
非共轭的微分方程 190
典型实函数 50
单叶性准则 5, 185, 190, 193
变分 199
变分方法 200

九 画

珍肯斯规范 260
茹利亚-王尔夫引理 327
面积定理 10, 56, 110
星形函数 38, 43, 157, 222
星形半径 183
哈代类 340
哈代恒等式 132
类 S 的系数估计 13, 18, 71, 75, 88, 126, 141, 178, 210, 270
类 Σ 的系数估计 11, 68, 123, 127, 143, 180, 215, 271, 272
迹 294
施笃斯角 284
带域 238, 253
拐曲点 347
柯林伍德极大性定理 294
临界点 227
临界轨线 231, 239

费茨捷拉德不等式 72
娄威纳方法 167
娄威纳链 166, 185
娄威纳微分方程 172
娄威纳变分 199

十 画

容量 353
容量估计 359
容量的次可加性 361, 370
容许集 244
容许值人 112
容许函数 244
容许洞伦 245, 269
格林公式 8
格林函数 354
格隆斯基系数 55, 95, 145
格隆斯基不等式 58, 96, 110, 216, 305
格隆斯基矩阵 61
格隆斯基算子 59, 313, 322
格拉贝定-谢菲尔系数 108
格拉贝定-谢菲尔不等式 112
紧算子 62, 322
紧致化 288, 290
圆域 238, 252
核 22
核收敛 22
积分均值 133, 340
缺项级数 135, 187
素端 288
素端的邻域 290
素端的主点 294
素端的迹 294
素端度盘 376
调和测度 334, 377
陶贝尔定理 147, 325
诺伊曼问题 322

十 一 画

渐近值 284
渐近路径 284
冠勃函数 3
冠勃函数的旋转 4
冠勃变换 14, 335
冠勃孤 284
球面导数 278
渚点 226
密劳克斯问题 374

十 二 画

普阿松公式 314
普莱斯奈尔点 345
普莱斯奈尔定理 345
普里瓦洛夫唯一性定理 346, 364
短轴 353
割点 298
等价零链 289
谢菲尔微分方程 204, 214, 246
谢菲尔变分 200
斐开特点组 352
斐开特多项式 352
最大增长方向 150
超限直径 353

十 三 画

零链 289
零容集 362
稠密域 239, 241, 254
解析容量 363
解析的格林公式 8

十 四 画

聚值集 293
像集的测度 343, 349
像集的容量 368, 373, 376, 377
端域 238, 253
豪斯道夫测度 341, 377

十 五 画

横截线 288, 369
整体结构定理 239
黎曼映照定理 3
黎斯唯一性定理 340

十六画以上

薛瓦尔兹导数 66, 190, 313
螺线形函数 184

覆盖定理 12，123，272

其　它

℘-函数 132
Q长度 227，241，248，249
Q面积 227，251，257
Q度量 227

006849